Niedersächsisches
Kultusministerium

Kerncurriculum für

das Gymnasium – gymnasiale Oberstufe
die Gesamtschule – gymnasiale Oberstufe
das Fachgymnasium
das Abendgymnasium
das Kolleg

Mathematik

Niedersachsen

An der Erarbeitung des Kerncurriculums für das Unterrichtsfach Mathematik für den Sekundarbereich II waren die nachstehend genannten Personen beteiligt:

Dr. Dorothee Göckel, Aurich
Alois Graelmann, Osnabrück
Werner Hellberg, Bederkesa
Heiner Henjes-Kunst, Hannover
Hans Kramer, Burgwedel
Hans-Ulrich Lampe, Stadthagen
Dietmar Scholz, Braunschweig
Hans-Dieter Stenten-Langenbach, Meppen
Werner Struckmann, Braunschweig
Wilhelm Weiskirch, Stadthagen

Wissenschaftliche Beratung:
Prof. Dr. Regina Bruder, Technische Universität Darmstadt
Prof. Dr. Jürg Kramer, Humboldt-Universität zu Berlin

Die Ergebnisse des gesetzlich vorgeschriebenen Anhörungsverfahrens sind berücksichtigt worden.

Herausgegeben vom Niedersächsischen Kultusministerium (2009)
30159 Hannover, Schiffgraben 12

Druck:
Unidruck
Windhorststraße 3-4
30167 Hannover

Das Kerncurriculum kann als PDF-Datei vom Niedersächsischen Bildungsserver (NIBIS) (http://www.cuvo.nibis.de) heruntergeladen werden.

Inhalt **Seite**

Allgemeine Informationen zu den niedersächsischen Kerncurricula

Kerncurricula und Bildungsstandards

Qualitätssicherung und Qualitätsentwicklung sind zentrale Anliegen im Bildungswesen. Grundlage von Bildung ist der Erwerb von gesichertem Verfügungs- und Orientierungswissen, das die Schülerinnen und Schüler zu einem wirksamen und verantwortlichen Handeln auch über die Schule hinaus befähigt. Den Ergebnissen von Lehr- und Lernprozessen im Unterricht kommt damit eine herausragende Bedeutung zu. Sie werden in Bildungsstandards[1] und Kerncurricula beschrieben.

Mit der Verabschiedung der Einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung (EPA) durch die Kultusministerkonferenz ist eine bundesweit einheitliche und damit vergleichbare Grundlage der fachspezifischen Anforderungen gelegt[2]. Niedersachsen hat die EPA mit Erlass vom 1.10.2006 in Kraft gesetzt. Die niedersächsischen Kerncurricula konkretisieren die EPA, indem sie fachspezifische Kompetenzen ausweisen und die dafür notwendigen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten benennen. In Kerncurricula soll ein gemeinsam geteilter Bestand an Wissen bestimmt werden, worüber Schülerinnen und Schüler in Anforderungssituationen verfügen.

Kompetenzen

Kompetenzen umfassen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten, aber auch Bereitschaften, Haltungen und Einstellungen, über die Schülerinnen und Schüler verfügen müssen, um Anforderungssituationen gewachsen zu sein. Kompetenzerwerb zeigt sich darin, dass zunehmend komplexere Aufgabenstellungen gelöst werden können. Deren Bewältigung setzt gesichertes Wissen und die Kenntnis und Anwendung fachbezogener Verfahren voraus.

Schülerinnen und Schüler sind kompetent, wenn sie zur Bewältigung von Anforderungssituationen

- auf vorhandenes Wissen zurückgreifen,
- die Fähigkeit besitzen, sich erforderliches Wissen zu beschaffen,
- zentrale Zusammenhänge des jeweiligen Sach- bzw. Handlungsbereichs erkennen,
- angemessene Handlungsschritte durchdenken und planen,
- Lösungsmöglichkeiten kreativ erproben,
- angemessene Handlungsentscheidungen treffen,
- beim Handeln verfügbare Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten einsetzen,
- das Ergebnis des eigenen Handelns an angemessenen Kriterien überprüfen.

Kompetenzerwerb

Der Kompetenzerwerb wird im Sekundarbereich II aufbauend auf den im Sekundarbereich I bereits erworbenen Kompetenzen fachlich differenziert in zunehmender qualitativer Ausprägung fortgesetzt. Im Unterricht soll der Aufbau von Kompetenzen systematisch, kumulativ und nachhaltig erfolgen; Wissen und Können sind gleichermaßen zu berücksichtigen. Dabei ist zu beachten, dass Wissen „träges",

---

[1] Im Sekundarbereich II: Einheitliche Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung

[2] Die Einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung Mathematik (Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 1.12.1989 i.d.F. vom 24.5.2002) sind seit 2005 anzuwenden [RdErl. d. MK v. 1.10.2007 (SVBl. S. 366)].

an spezifische Lernkontexte gebundenes Wissen bleibt, wenn es nicht aktuell und in verschiedenen Kontexten genutzt werden kann. Die Anwendung des Gelernten auf neue Themen, die Verankerung des Neuen im schon Bekannten und Gekonnten, der Erwerb und die Nutzung von Lernstrategien und die Kontrolle des eigenen Lernprozesses spielen beim Kompetenzerwerb eine wichtige Rolle.
Lernstrategien wie Organisieren, Wiedergabe von auswendig Gelerntem (Memorieren) und Verknüpfung des Neuen mit bekanntem Wissen (Elaborieren) sind in der Regel fachspezifisch lehr- und lernbar und führen dazu, dass Lernprozesse bewusst gestaltet werden können. Transparente Planung, Kontrolle und Reflexion ermöglichen Einsicht in den Erfolg des Lernprozesses.

Struktur der Kerncurricula

Kerncurricula haben eine gemeinsame Grundstruktur: Sie weisen inhaltsbezogene und prozessbezogene Kompetenzbereiche aus, die miteinander verknüpft werden müssen.

- Die prozessbezogenen Kompetenzbereiche beziehen sich auf Verfahren, die von Schülerinnen und Schülern verstanden und beherrscht werden sollen, um Wissen anwenden zu können. Sie umfassen diejenigen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten, die einerseits die Grundlage, andererseits das Ziel für die Erarbeitung und Bearbeitung der inhaltsbezogenen Kompetenzbereiche sind, zum Beispiel
  - Symbol- oder Fachsprache kennen, verstehen und anwenden,
  - fachspezifische Methoden und Verfahren kennen und zur Erkenntnisgewinnung nutzen,
  - Verfahren zum selbstständigen Lernen und zur Reflexion über Lernprozesse kennen und einsetzen,
  - Zusammenhänge erarbeiten und erkennen sowie ihre Kenntnis bei der Problemlösung nutzen.
- Die inhaltsbezogenen Kompetenzbereiche sind fachbezogen; es wird bestimmt, über welches Wissen die Schülerinnen und Schüler im jeweiligen Inhaltsbereich verfügen sollen.

Die Kerncurricula des Sekundarbereichs II greifen diese Grundstruktur unter fachspezifischen Gesichtspunkten auf. Durch die Wahl und Zusammenstellung der Kompetenzbereiche wird der intendierte didaktische Ansatz des jeweiligen Unterrichtsfachs deutlich. Die erwarteten Kompetenzen beziehen sich vorrangig auf die fachlichen Kenntnisse, Fähigkeiten und Fertigkeiten, über die Schülerinnen und Schüler verfügen sollen. Wichtig ist auch die Förderung von sozialen und personalen Kompetenzen, die über das Fachliche hinausgehen.

Rechtliche Grundlagen

Allgemeine Rechtsgrundlagen für das fachbezogene Kerncurriculum sind das Niedersächsische Schulgesetz, die Verordnung über die gymnasiale Oberstufe und die Abiturprüfung sowie die Einheitlichen Prüfungsanforderungen in der Abiturprüfung. Für die Umsetzung der Kerncurricula gelten die fachspezifischen Bezugserlasse.

1 Bildungsbeitrag des Faches Mathematik

Die Schülerinnen und Schüler erweitern im Sekundarbereich II ihre im Sekundarbereich I erworbenen prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen mit dem Ziel, sich auf die Anforderungen eines Studiums oder einer beruflichen Ausbildung vorzubereiten. Darüber hinaus ist es ihnen auf der Grundlage eines anwendungsbereiten Wissens und verfügbarer Verfahrenskenntnisse möglich, am gesellschaftlichen Leben teilzuhaben, es aktiv mit zu gestalten und weiter zu entwickeln.

Für die Vertiefung der allgemeinen Bildung, die kulturelle Basiskompetenzen, ein breites Orientierungswissen sowie eine wissenschaftspropädeutische Grundbildung einschließt, sollte der Mathematikunterricht folgende Erfahrungen ermöglichen:[3]

(1) Mathematik bietet eine Vielzahl von Modellen zur Beschreibung der Welt um uns. Dabei erweist sich Mathematik als eine weltzugewandte, nützliche Wissenschaft.

(2) Mathematik ist eine deduktiv geordnete Welt eigener Art. Indem Schülerinnen und Schüler induktiv Zusammenhänge erkunden, systematisieren, in ihnen argumentieren und begründen, orientieren sie sich in diesem Gedankengebäude. Sie erfahren dabei die mathematische Erkenntnisgewinnung als eine kulturelle Errungenschaft, die historisch gewachsen ist.

(3) Bei der Auseinandersetzung mit mathematischen Fragestellungen werden Problemlösestrategien und -fähigkeiten erworben, die über das Fach Mathematik hinaus genutzt werden können.

(4) Mathematik leistet einen Beitrag zur Persönlichkeitsentwicklung. Mathematische Fragestellungen sind dazu geeignet, die Neugier und das Interesse zu wecken, aber auch Beharrlichkeit zu entwickeln. In der Zusammenarbeit mit Anderen wird die Kommunikations- und Kooperationsfähigkeit geschult. Mathematisches Können fördert die Entwicklung von Selbstvertrauen.

Im Unterricht des Sekundarbereichs II muss das dynamische Gleichgewicht zwischen (1) und (2) in besonderem Maße zur Geltung kommen. Die Prozesse im Modellbildungskreislauf sind daher unverzichtbar. Sie sprechen die Mathematisierung außermathematischer Situationen an und tragen zum Aufbau eines Grundverständnisses mathematischer Begriffe bei. Darüber hinaus erschließen heuristische Fähigkeiten außer- und innermathematische Problemstellungen (3). Sie fördern eine intellektuelle Haltung und befähigen, sich frei und kreativ einer gedanklichen Herausforderung zu stellen (4).

In der Auseinandersetzung mit Anderen und der Vernetzung mit neuen, vergleichbar gestalteten Situationen entstehen mit zunehmender Abstraktion eine fachspezifische Begrifflichkeit und ein gültiges Gesamtbild von Mathematik, das den prozesshaften und den systemischen Charakter dieser Wissenschaft widerspiegelt.

---

[3] Winter, H. (1995): Mathematikunterricht und Allgemeinbildung. In: Mitteilungen für Gesellschaft für Didaktik der Mathematik, Nr. 61, S. 37 – 46.
Heymann, H. W. (1996): Allgemeinbildung und Mathematik. Weinheim, Basel: Beltz

2 Unterrichtsgestaltung mit dem Kerncurriculum

2.1 Allgemeine Bemerkungen

Dieses Kerncurriculum gilt für die Qualifikationsphase des Gymnasiums sowie für die Einführungsphase und Qualifikationsphase der Gesamtschule, des Fachgymnasiums, des Abendgymnasiums und des Kollegs.

Das Kapitel 3.1 weist die Kompetenzen aus, die am Ende der Einführungsphase der Gesamtschule, des Fachgymnasiums, des Abendgymnasiums und des Kollegs erworben sein sollen. Im Kapitel 3.2 sind die Kompetenzen für die Qualifikationsphase der gymnasialen Oberstufe ausgewiesen.

2.2 Kompetenzerwerb im Mathematikunterricht

Die in den EPA Mathematik vorgegebenen Anforderungen werden im Kerncurriculum durch die Beschreibung von erwarteten Kompetenzen konkretisiert. Die Orientierung an Kompetenzen hat zur Folge, dass der Blick auf die Lernergebnisse der Schülerinnen und Schüler gelenkt wird und das Lernen als kumulativer Prozess organisiert wird.

Aufgabe des Mathematikunterrichts im Sekundarbereich II ist es, die vorhandenen Kompetenzen der Schülerinnen und Schüler weiter zu entwickeln, zu ergänzen und nachhaltig zu sichern. Um in wechselnden Problemsituationen flexibel verfügbar zu sein, müssen Kompetenzen, die sich auf mathematische Prozesse beziehen und Kompetenzen, die auf mathematische Inhalte ausgerichtet sind, gleichermaßen entwickelt werden.

Die Weiterentwicklung und der Erwerb dieser Kompetenzen müssen berücksichtigen, dass die Schülerinnen und Schüler Verantwortung für den Lernprozess und den Lernerfolg übernehmen und sowohl den Unterricht als auch das eigene Lernen aktiv selbst gestalten.

Lernsituationen, die Sachkontexte, innermathematische Zusammenhänge und offene Problemstellungen beinhalten, fördern den Kompetenzerwerb und verknüpfen prozess- und inhaltsbezogene Kompetenzbereiche miteinander. Sie ermöglichen Schülerinnen und Schülern mathematische Zusammenhänge zu entdecken und Begriffe selbst zu entwickeln, an Alltags- und Vorerfahrungen anzuknüpfen und individuelle Lernwege zu beschreiten.

Durch eine Lernkultur, in der sich die Schülerinnen und Schüler ihrer eigenen Lernwege bewusst werden, unterschiedliche Lösungen reflektieren und selbstständig Entscheidungen treffen, werden diese Kompetenzen erworben und weiterentwickelt. So wird lebenslanges Lernen angeregt und die Grundlage für motiviertes, durch Neugier und Interesse geprägtes Handeln erweitert. Fehler und Umwege werden dabei als bedeutsame Bestandteile von Erfahrungs- und Lernprozessen angesehen.

Unterschiedliche Unterrichtsformen und vielfältige Methoden unterstützen das selbstständige Lernen der Schülerinnen und Schüler ebenso wie eine Wissensvermittlung durch die Lehrkraft.

Neben dem Erwerb von Wissen muss der Unterricht auch Gelegenheiten bieten, die erworbenen Kompetenzen anzuwenden und mittels intelligenten Übens zu festigen.

Zur Rolle von Aufgaben

Wesentliche Prozesse beim Kompetenzaufbau werden durch geeignete Aufgaben gesteuert, die möglichst vielfältige Lösungsansätze zulassen, die Kreativität von Schülerinnen und Schülern anregen und darüber hinaus Kooperation und Kommunikation fördern. Das Ziel der Konstruktion von „intelligentem Wissen“ und des Erwerbs von Kompetenzen, die flexibel einsetzbar sind, erfordert eine Vielfalt von Aufgabentypen. Die unterschiedlichen Anforderungen an Aufgaben zeigen sich nicht nur bei typischen Tätigkeiten wie dem Erkunden, Systematisieren und Üben. Auch Schwerpunktsetzungen bezüglich der prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen, die Entwicklung von Problemlösestrategien und nicht zuletzt die Notwendigkeit der inneren Differenzierung erfordern die Bearbeitung unterschiedlicher Aufgabentypen einschließlich offener Aufgaben. Dabei muss jede Aufgabenstellung im Kontext der methodischen Umsetzung gesehen werden.

Aufgaben zum Kompetenznachweis sind auf eine möglichst objektive und differenzierte Erfassung von individuellen Leistungen ausgerichtet. Die Schülerinnen und Schüler weisen bei ihrer Bearbeitung nach, welche Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten sie besitzen und wie sie diese einsetzen, um unbekannte Probleme zu lösen. Aufgaben zum Kompetenznachweis müssen entsprechend klare und differenzierte Anforderungen stellen und dürfen sich nicht nur auf das schematische und kalkülhafte Abarbeiten von Verfahren beschränken. Die Aufgaben spiegeln die Vielfalt der im Unterricht erworbenen Kenntnisse, Fertigkeiten und Fähigkeiten wider und beinhalten sowohl eingeübte Verfahren als auch variantenreich gestaltete bekannte oder abgewandelte Fragestellungen und erfassen damit prozess- und inhaltsbezogene Kompetenzen.

Sowohl bei Aufgaben zum Kompetenzerwerb als auch zum Kompetenznachweis sind die Anforderungsbereiche der EPA Mathematik[4] zu berücksichtigen (s. Anhang).

Zum Einsatz von Technologie

Im Mathematikunterricht stehen elektronische Medien wie grafikfähige Taschenrechner (GTR), Computer-Algebra-Systeme (CAS), Tabellenkalkulationsprogramme, Dynamische Geometrieprogramme, weitere Software sowie das Internet zur Verfügung. Diese unterstützen den Aufbau von Kompetenzen, indem sie gezieltes Experimentieren und das Entdecken neuer Sachverhalte ermöglichen, zu Fragen anregen und die Selbstständigkeit und Kreativität der Schülerinnen und Schüler fördern. Der Einsatz elektronischer Hilfsmittel ermöglicht einen direkten Zugang zu unterschiedlichen Lösungsverfahren und unterstützt in gleicher Weise die Anwendung von grafischen, tabellarischen, numerischen und symbolischen Methoden und Verfahren. Durch die Verfügbarkeit dieser Hilfsmittel sind rechnerfreie algorithmische Tätigkeiten auf grundlegende Fertigkeiten zu begrenzen. Chancen und Grenzen des jeweils eingesetzten Werkzeugs bedürfen einer kritischen Reflexion.

Im Kapitel 3.3 erfolgen konkrete Hinweise zu dem Technologieeinsatz in den einzelnen Lernbereichen.

[4] a. a. O., Abschnitt 2.2

Als Hilfsmittel für die Arbeit im Unterricht, für das Lösen von Hausaufgaben und für Leistungskontrollen müssen ein grafikfähiger Taschenrechner oder ein leistungsfähigerer Rechner sowie eine Formelsammlung zur Verfügung stehen.

2.3 Einführungsphase an Gesamtschule, Fachgymnasium, Abendgymnasium und Kolleg

Die besondere Aufgabe der Einführungsphase besteht darin, die fachbezogenen Kompetenzen unterschiedlich vorgebildeter Schülerinnen und Schüler zu erweitern, zu festigen und zu vertiefen, damit die Lernenden am Ende der Einführungsphase über diejenigen Kompetenzen verfügen, die am Gymnasium bis zum Ende des Schuljahrgangs 10 erworben sein sollen.[5] Diese bilden zugleich die Eingangsvoraussetzungen für die Qualifikationsphase. Damit hat der Unterricht folgende Ziele:

- Einführung in die Arbeitsweisen der Qualifikationsphase,
- Einblicke gewähren in das unterschiedliche Vorgehen der Kurse auf grundlegendem und erhöhtem Anforderungsniveau,
- Entscheidungshilfen geben bei der Fächerwahl in der Qualifikationsphase,
- Kenntnisse fachlich ausdifferenzieren,
- Lücken schließen, die sich durch die unterschiedlichen Bildungsgänge ergeben haben.

2.4 Qualifikationsphase

Die in der Qualifikationsphase zu vermittelnden prozessbezogenen und inhaltsbezogenen Kompetenzen sind in den Tabellen des Kapitels 3.2 festgelegt, wobei teilweise eine Differenzierung zwischen der gymnasialen Oberstufe der allgemein bildenden Schulformen und des Fachgymnasiums erfolgt. Ferner werden im Kapitel 3.3 Lernbereiche dargestellt, die ausgehend von konkreten Anwendungssituationen die Entwicklung der geforderten Kompetenzen ermöglichen.

2.5 Kursarten und Anforderungsniveaus

Das Fach Mathematik wird in der Qualifikationsphase angeboten

- als *vierstündiges Prüfungsfach* auf erhöhtem Anforderungsniveau,
- als *vierstündiges Prüfungsfach* auf grundlegendem Anforderungsniveau oder
- als *vierstündiges Unterrichtsfach* auf grundlegendem Anforderungsniveau.

In Anlehnung an die EPA Mathematik[6] führt der Unterricht auf grundlegendem Anforderungsniveau im Fach Mathematik in grundlegende mathematische Sachverhalte, Probleme und Zusammenhänge ein.

---

[5] Im Abendgymnasium und im Kolleg können Teile sowohl der inhaltlichen als auch der prozessbezogenen Kompetenzen der Einführungsphase in der Qualifikationsphase erworben werden.
[6] a. a. O., Abschnitt 1.4.1

Er zielt mit Bezug auf Anwendungen auf die Beherrschung wesentlicher Arbeitsmethoden und die exemplarische Erkenntnis fächerübergreifender Zusammenhänge.
Unterricht auf erhöhtem Anforderungsniveau im Fach Mathematik befasst sich systematischer mit wesentlichen, die Breite, die Komplexität und den Aspektreichtum des Faches verdeutlichenden Inhalten, Theorien und Modellen. Er ist gerichtet auf vertiefte Beherrschung der fachlichen Methoden, ihre selbstständige Anwendung, Übertragung und theoretische Reflexion.
Die Anforderungen auf grundlegendem Anforderungsniveau sollen sich daher nicht nur quantitativ, sondern vor allem auch qualitativ von denen auf erhöhtem Anforderungsniveau unterscheiden. Dies zeigt sich insbesondere an

- dem Grad der Vorstrukturierung,
- dem Schwierigkeitsgrad, insbesondere der Komplexität,
- dem Umfang und der Art der bereitgestellten Hilfsmittel und Informationen,
- den Anforderungen an Selbstständigkeit bei der Bearbeitung der Aufgaben und
- der Verwendung der Fachsprache.

3 Erwartete Kompetenzen

3.1 Einführungsphase an Gesamtschule, Fachgymnasium, Abendgymnasium und Kolleg

In der Einführungsphase erwerben die Schülerinnen und Schüler die Fähigkeit, die eingeführte Technologie (GTR/CAS) sinnvoll und sicher zu nutzen. Dies unterstützt den Aufbau von prozessbezogenen Kompetenzen, indem gezieltes Experimentieren und Entdecken ermöglicht und die Selbstständigkeit und Kreativität gefördert werden. Plausibilitätsüberlegungen sind legitim, wenn sie zur Einsicht und zum Verständnis grundlegender Inhalte führen, dennoch sind Begründungen durchgängig einzufordern. Die Notwendigkeit von Beweisen und deren Durchführung wird exemplarisch an geeigneten Beispielen einsichtig gemacht. Die Begriffsbildung über konkrete Anwendungsbezüge und die Zusammenführung von Begriffen und Verfahren zu strukturiertem mathematischen Wissen ist ein grundsätzliches Unterrichtsprinzip.
Beim Einsatz der Technologie sind deren Chancen und Grenzen kritisch zu reflektieren.

3.1.1 Prozessbezogene Kompetenzen

	Die Schülerinnen und Schüler …
Mathematisch argumentieren	• erläutern präzise mathematische Zusammenhänge und Einsichten unter Verwendung der Fachsprache. • kombinieren mathematisches Wissen für Begründungen und Argumentationsketten und nutzen dabei auch formale und symbolische Elemente und Verfahren. • erkennen in Sachsituationen kausale Zusammenhänge, geben Begründungen an, überprüfen und bewerten diese.
Probleme mathematisch lösen	• beschaffen zu inner- und außermathematischen Problemen die zu einer Lösung noch fehlenden Informationen. • wählen geeignete heuristische Strategien wie Zerlegen in Teilprobleme, Spezialisieren und Verallgemeinern, Systematisieren und Strukturieren zum Problemlösen aus und wenden diese an. • nutzen die eingeführte Technologie beim Problemlösen zielgerichtet, aber auch zur Unterstützung beim systematischen Probieren. • reflektieren ihre Vorgehensweise.
Mathematisch modellieren	• wählen, variieren und verknüpfen Modelle zur Beschreibung von Anwendungsbezügen. • analysieren und bewerten verschiedene Modelle im Hinblick auf die Anwendungsbezüge. • erkennen funktionale Zusammenhänge in Anwendungsbezügen, beschreiben diese und nutzen die globalen und lokalen Eigenschaften bestimmter Funktionen sowie die Variation von Parametern zur Modellierung.
Mathematische Darstellungen verwenden	• nutzen Tabellen, Graphen und Terme zur Darstellung von Funktionen, insbesondere unter Verwendung der eingeführten Technologie. • wechseln zwischen den Darstellungsformen von Funktionen.
Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen umgehen	• verwenden mathematische Symbole und Schreibweisen sachgerecht. • nutzen Tabellen, Graphen, Terme und Gleichungen zur Bearbeitung funktionaler Zusammenhänge. • nutzen Termumformungen zum Lösen von Gleichungen, ggf. auch mit CAS. • wählen geeignete Verfahren zum Lösen von Gleichungen, insbesondere unter Verwendung der eingeführten Technologie. • nutzen eingeführte Lehrbücher und Formelsammlungen. • nutzen die zu den eingeführten Technologien bereitgestellten Hilfen.
Kommunizieren	• teilen ihre Überlegungen unter Verwendung der Fachsprache anderen verständlich mit. • präsentieren Problembearbeitungen unter Verwendung geeigneter Medien. • gehen auf Überlegungen anderer zu mathematischen Inhalten ein und überprüfen diese auf Schlüssigkeit und Vollständigkeit. • organisieren, beurteilen und bewerten die Arbeit im Team und entwickeln diese weiter.

3.1.2 Inhaltsbezogene Kompetenzen

Die Schüler und Schülerinnen …
• erkennen in Anwendungsbezügen funktionale Zusammenhänge als Zuordnungen zwischen Zahlen bzw. Größen in Tabellen, Graphen, Diagrammen und Sachtexten, beschreiben diese verbal, erläutern und beurteilen sie. • kennen verschiedene symbolische Darstellungsformen für Funktionen. • identifizieren und klassifizieren Funktionen in Tabellen, Termen, Gleichungen und Graphen und wechseln zwischen den Darstellungen. • nutzen Potenz-, Exponential- und die Sinusfunktion als Mittel zur Beschreibung quantitativer Zusammenhänge, auch unter Verwendung der eingeführten Technologie. • stellen Datenpaare auch unter Verwendung der eingeführten Technologie grafisch dar und führen Regressionen durch. • modellieren Sachsituationen, indem sie die Eigenschaften von Funktionen zur Lösung von Problemen nutzen und die Lösungen bewerten. • führen eine Parametervariation für Potenz- und Exponentialfunktionen in der Form $y = a \cdot f(b \cdot x + c) + d$ an Beispielen unter Verwendung der eingeführten Technologie durch und beschreiben und begründen die Auswirkung auf den Graphen. • deuten in grafischen Darstellungen von Anwendungssituationen die Parameter der Potenz- und Exponentialfunktion. • bestimmen eine Funktionsgleichung aus gegebenem Graphen für Potenz- und Exponentialfunktion in der Form $y = a \cdot f(b \cdot x + c) + d$. • grenzen in Sachzusammenhängen lineares und exponentielles Wachstum gegeneinander ab, auch unter Verwendung der eingeführten Technologie. • beschreiben und interpretieren mittlere Änderungsraten und Sekantensteigungen in funktionalen Zusammenhängen, die als Tabelle, Graph oder Term dargestellt sind, berechnen diese auch unter Verwendung der eingeführten Technologie und erläutern sie an Beispielen. • beschreiben und interpretieren mithilfe eines propädeutischen Grenzwertbegriffs die Entwicklung der Ableitung als lokale Änderungsrate aus der mittleren Änderungsrate. • beschreiben und interpretieren die Ableitung als Tangentensteigung, erläutern sie an Beispielen und berechnen sie auch unter Verwendung der eingeführten Technologie. • entwickeln Graph und Ableitungsgraph auseinander, beschreiben und begründen Zusammenhänge und interpretieren diese in Sachzusammenhängen. • beschreiben und begründen Zusammenhänge zwischen Graph und Ableitungsgraph auch unter Verwendung der Begriffe Extrem- und Wendepunkt. • kennen zur Bildung der Ableitungsfunktion die Potenzregel, Faktorregel und Summenregel und wenden diese zur Berechnung der Ableitungsfunktionen von ganzrationalen Funktionen an. • kennen die Ableitungsfunktion von $x \to \sin(x)$. • lösen mit der Ableitung Sachprobleme mit Anwendungsbezug, auch unter Verwendung der eingeführten Technologie. • lösen mit der Ableitung von ganzrationalen Funktionen bis 4. Grades Optimierungsprobleme, auch unter Verwendung der eingeführten Technologie.

3.2 Qualifikationsphase

Die Bewältigung mathematischer Problemsituationen erfordert das Zusammenspiel von prozess- und inhaltsbezogenen Kompetenzen. Die inhaltsbezogenen Kompetenzen werden jeweils Leitideen zugeordnet, die nicht auf bestimmte mathematische Themenbereiche begrenzt sind.

Prozessbezogene Kompetenzbereiche	Inhaltsbezogene Kompetenzbereiche
• Mathematisch argumentieren • Probleme mathematisch lösen • Mathematisch modellieren • Mathematische Darstellungen verwenden • Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen • Kommunizieren	• Algorithmus • Messen • Räumliches Strukturieren/Koordinatisieren • Funktionaler Zusammenhang • Daten und Zufall

Die Kompetenzen zeigen sich insbesondere in Form von Tätigkeiten beim Lösen von Aufgaben. Beim kognitiven Anspruch dieser Tätigkeiten werden drei Anforderungsbereiche unterschieden (s. Anhang).
In den Kapiteln 3.2.1 bis 3.2.3 werden zunächst zu jedem Kompetenzbereich die damit verbundenen Intentionen erläutert. Die zu vermittelnden prozessbezogenen und inhaltsbezogenen Kompetenzen werden im Anschluss daran in tabellarischer Form aufgelistet.
Aufgrund der unterschiedlichen Ausprägungen sind die zu erwerbenden inhaltsbezogenen Kompetenzen für das Gymnasium, die Gesamtschule, das Abendgymnasium und das Kolleg (Kapitel 3.2.2) und für das Fachgymnasium (Kapitel 3.2.3) getrennt aufgeführt.
Die Anordnung der Kompetenzen legt weder eine Rangfolge noch eine zeitliche Reihenfolge der unterrichtlichen Umsetzung fest.
In Kapitel 3.3 werden Lernbereiche dargestellt, die ausgehend von konkreten Anwendungssituationen die Entwicklung der geforderten Kompetenzen ermöglichen. Diese sind als thematische Umsetzung des Kerncurriculums zu verstehen. Den Lernbereichen sind die zu erarbeitenden mathematischen Begriffe und Verfahren sowie Hinweise zum Einsatz der Technologie zugeordnet. Die Lernbereiche für das Gymnasium, die Gesamtschule, das Abendgymnasium und das Kolleg finden sich in Kapitel 3.3.1 und die für das Fachgymnasium in Kapitel 3.3.2.
In den Tabellen der Kompetenzen und Lernbereiche finden sich ein gemeinsames Fundamentum für beide Anforderungsniveaus und niveauabhängige Differenzierungen.

3.2.1 Prozessbezogene Kompetenzen

<table>
<tr><td colspan="2">

Mathematisch argumentieren

Das Argumentieren hebt sich vom einfachen Informationsaustausch bzw. dem intuitiven Entscheiden vor allem durch den Anspruch auf Stimmigkeit ab. Beim Argumentieren in außermathematischen Situationen geht es vor allem um das Rechtfertigen von Modellannahmen, das Interpretieren von Ergebnissen, das Bewerten der Gültigkeit oder der Nützlichkeit eines Modells und das Treffen von Entscheidungen mithilfe des Modells. Beim Argumentieren in innermathematischen Situationen spricht man allgemein vom Begründen und je nach Strenge auch vom Beweisen.

Das Argumentieren umfasst ein breites Spektrum von Aktivitäten: vom Erkunden von Situationen, Strukturieren von Informationen, Fragen stellen, Aufstellen von Vermutungen, Angeben von Beispielen und Plausibilitätsbetrachtungen über das schlüssige Begründen bis hin zum formalen Beweisen. Die eingeführte Technologie verleiht den aufgestellten Vermutungen eine breitere Plausibilität, macht aber strengere Begründungen keineswegs überflüssig, sondern bereitet diese vor. Hierbei kommen unterschiedliche Abstufungen zum Tragen: vom intuitiven Begründen durch Verweis auf Plausibilität oder Beispiele bis zum Beweisen durch Zurückführen auf gesicherte Aussagen.

</td></tr>
<tr><td>grundlegendes Anforderungsniveau</td><td>erhöhtes Anforderungsniveau</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Die Schülerinnen und Schüler …

- erläutern in inner- und außermathematischen Situationen Strukturen und Zusammenhänge und stellen darüber Vermutungen auf.
- begründen oder widerlegen Aussagen in angemessener Fachsprache mit mathematischen Mitteln und reflektieren die Vorgehensweise.
- reflektieren und bewerten Argumentationen und Begründungen auf Schlüssigkeit und Angemessenheit.
- vertreten eigene Problemlösungen und Modellierungen.

</td></tr>
<tr><td></td><td>

- vergleichen und bewerten verschiedene Begründungen für einen mathematischen Sachverhalt.
- reflektieren Beweisverfahren.
- variieren Situationen, stellen Vermutungen auf und untersuchen diese.

</td></tr>
</table>

Probleme mathematisch lösen Anforderungen an Abstraktion, Folgerichtigkeit und Exaktheit bei der Auseinandersetzung mit mathematischen Problemen schulen in besonderem Maße das systematische und logische Denken sowie das kritische Urteilen. Beim selbstständigen Bearbeiten von mathematischen Problemen nutzen und reflektieren die Schülerinnen und Schüler Heurismen und festigen das Vertrauen in ihre Denkfähigkeit. Bei der Bearbeitung von Problemen erfahren Schülerinnen und Schüler, dass Anstrengungsbereitschaft und Beharrlichkeit erforderlich sind, um zu Lösungen zu gelangen. Die eingeführte Technologie ermöglicht durch die vielfältigen und schnell zugänglichen Darstellungsformen ein experimentelles Arbeiten. Mathematische Probleme können durch Variation und Erkundung der Konsequenzen eigenständig gefunden und gelöst werden. Dabei bietet sich die Gelegenheit, über die Tauglichkeit der eingesetzten Werkzeuge zu reflektieren.	
grundlegendes Anforderungsniveau	erhöhtes Anforderungsniveau
Die Schülerinnen und Schüler … • finden in inner- und außermathematischen Situationen mathematische Probleme, formulieren diese mit eigenen Worten und in mathematischer Fachsprache. • überprüfen die Plausibilität der Ergebnisse. • beschreiben, vergleichen und bewerten Lösungswege. • wählen geeignete heuristische Strategien zum Problemlösen aus und wenden diese auch unter Nutzung der eingeführten Technologie an. • reflektieren und bewerten die benutzten Strategien.	
	• variieren vorgegebene mathematische Probleme und untersuchen die Auswirkungen auf die Problemlösung.

Mathematisch modellieren Realsituationen können durch Modellierung einer mathematischen Bearbeitung zugänglich gemacht werden. Das Modellieren umfasst: Idealisieren und Vereinfachen der Realsituation, Festlegen von Annahmen, Übersetzen in mathematische Begriffe und Auswahl geeigneter mathematischer Verfahren sowie das Arbeiten in dem gewählten Modell. Der Reflexion und Beurteilung sowie ggf. der Variation des verwendeten mathematischen Modells im Hinblick auf die Realsituation kommt dabei eine besondere Bedeutung zu. Die eingeführte Technologie erlaubt die Verarbeitung umfangreicher Daten und Untersuchung komplexer funktionaler Modelle. Die Schülerinnen und Schüler nutzen ihre Ergebnisse von Modellierungsprozessen zum Erstellen von Prognosen und als Grundlage für Entscheidungen. Aussagen und Behauptungen, die auf Modellannahmen basieren, werden kritisch betrachtet.	
grundlegendes Anforderungsniveau	erhöhtes Anforderungsniveau
Die Schülerinnen und Schüler … • vereinfachen durch Abstrahieren und Idealisieren Realsituationen, um sie einer mathematischen Beschreibung zugänglich zu machen und reflektieren die Vereinfachungsschritte. • beschreiben Realsituationen und Realprobleme durch mathematische Modelle wie z. B. durch Funktionen, Zufallsversuche, Wahrscheinlichkeitsverteilungen, Matrizen, Koordinaten und Vektoren. • verwenden Regressionen zur Ermittlung eines mathematischen Modells. • führen mit den Verfahren der Infinitesimalrechnung, mit denen der Koordinaten- und Vektorgeometrie und/oder der Matrizenrechnung sowie mit denen der Wahrscheinlichkeitsrechnung Berechnungen im Modell durch und interpretieren die Verfahren ggf. hinsichtlich der Realsituation. • interpretieren Ergebnisse aus Modellrechnungen in der Realsituation und modifizieren ggf. das Modell. • reflektieren die Grenzen von Modellen und der mathematischen Beschreibung von Realsituationen. • ordnen einem mathematischen Modell verschiedene passende Realsituationen zu und reflektieren so die Universalität von Modellen.	

Mathematische Darstellungen verwenden

Mathematisches Arbeiten erfordert das Anlegen und Interpretieren von Darstellungen und den dem Problem angemessenen Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungen. Zu den Darstellungsformen gehören Texte und Bilder; Tabellen, Graphen und Terme; Skizzen, Grafiken und Diagramme sowie Figuren, die geometrische, stochastische oder logische Zusammenhänge veranschaulichen. Die eingeführte Technologie unterstützt einen flexiblen Umgang mit mathematischen Darstellungen.

Eigene Darstellungen dienen dem Strukturieren und Dokumentieren individueller Überlegungen und unterstützen die Argumentation und das Problemlösen. Der flexible Wechsel zwischen verschiedenen Darstellungsformen erleichtert das Verständnis von Sachzusammenhängen. Insbesondere bei der Präsentation von Ergebnissen erfahren die Schülerinnen und Schüler die Bedeutung von Darstellungen als Kommunikationsmittel.

<table>
<tr><th>grundlegendes Anforderungsniveau</th><th>erhöhtes Anforderungsniveau</th></tr>
<tr><td colspan="2">Die Schülerinnen und Schüler …
• verwenden verschiedene Darstellungsformen von Funktionen und wechseln zwischen diesen.
• verwenden geometrische und vektorielle Darstellungsformen für geometrische Gebilde und wechseln zwischen diesen.
• verwenden Matrizen und Diagramme zur Darstellung von Prozessen und wechseln zwischen diesen Darstellungsformen.
• stellen Zufallsexperimente auf verschiedene Weise dar und berechnen damit Wahrscheinlichkeiten.</td></tr>
<tr><td>• begründen ihre Auswahl von Darstellungen.</td><td>• begründen ihre Auswahl von Darstellungen und reflektieren allgemeine Vor- und Nachteile sowie die Grenzen unterschiedlicher Darstellungsweisen.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen</td></tr>
<tr><td colspan="2">Problemstellungen und Lösungen werden in der Regel in natürlicher Sprache dargestellt. Durch die Übersetzung in eine von Eindeutigkeit und Prägnanz geprägte symbolische und formale Sprache werden komplexe Sachverhalte einer mathematischen Bearbeitung zugänglich gemacht. Der Umgang mit symbolischen, formalen und technischen Elementen umfasst strategische Fähigkeiten und grundlegendes Regelwissen als Voraussetzung für zielgerichtetes und effizientes Bearbeiten von mathematischen Problemstellungen.
Die Schülerinnen und Schüler setzen Regeln und Verfahren verständig ein und nutzen dabei auch die eingeführte Technologie.</td></tr>
<tr><td>grundlegendes Anforderungsniveau</td><td>erhöhtes Anforderungsniveau</td></tr>
<tr><td colspan="2">Die Schülerinnen und Schüler …
• verwenden mathematische Symbole zum Strukturieren von Informationen, zum Modellieren und zum Problemlösen.
• reflektieren deren Verwendung und übersetzen zwischen symbolischer und natürlicher Sprache.
• arbeiten mit Funktionstermen, mit Gleichungen und Gleichungssystemen sowie mit Vektoren und Matrizen.
• setzen die eingeführte Technologie in allen Themenfeldern als sinnvolles Werkzeug zum Lösen mathematischer Probleme ein.
• belegen ihr Grundverständnis für elementare algorithmische Verfahren, indem sie diese auch ohne die eingeführte Technologie in überschaubaren Situationen ausführen.
• nutzen eine handelsübliche Formelsammlung.</td></tr>
<tr><td></td><td>• kennen algorithmische Verfahren und können sie anhand von Beispielen erläutern.</td></tr>
</table>

Kommunizieren

Kommunizieren über mathematische Zusammenhänge beinhaltet das Dokumentieren, das verständliche Darstellen und Präsentieren von Überlegungen, Lösungswegen und Ergebnissen. Dazu müssen die Schülerinnen und Schüler Äußerungen von anderen und Texte zu mathematischen Inhalten verstehen und überprüfen.

Schülerinnen und Schüler nehmen mathematische Informationen und Argumente auf, strukturieren Informationen, erläutern mathematische Sachverhalte und verständigen sich darüber mit eigenen Worten und unter Nutzung angemessener Fachbegriffe. Sie strukturieren und dokumentieren mündlich und schriftlich ihre Arbeit, Lernwege und Ergebnisse, wobei sie verschiedene mathematische Darstellungsformen sowie die eingeführte Technologie nutzen. Zudem bieten sich durch den Einsatz von Medien neue Möglichkeiten des elektronischen Datenaustauschs.

Die Schülerinnen und Schüler geben ihre Überlegungen verständlich weiter. Sie prüfen und bewerten Argumentationen. Dabei gehen sie konstruktiv mit Fehlern und Kritik um.

<table>
<tr><th>grundlegendes Anforderungsniveau</th><th>erhöhtes Anforderungsniveau</th></tr>
<tr><td colspan="2">Die Schülerinnen und Schüler …
• erfassen, interpretieren und reflektieren mathematikhaltige authentische Texte.
• erläutern eigene Problembearbeitungen und Einsichten sowie mathematische Zusammenhänge mit eigenen Worten und unter Verwendung geeigneter Fachsprache.
• dokumentieren Überlegungen, Lösungswege und Ergebnisse auch im Hinblick auf die verwendete Technologie und stellen jene verständlich dar.
• präsentieren Überlegungen, Lösungswege und Ergebnisse unter Verwendung geeigneter Medien.
• verstehen Überlegungen von anderen zu mathematischen Inhalten, überprüfen diese auf Schlüssigkeit und Vollständigkeit und gehen darauf ein.</td></tr>
<tr><td></td><td>• verwenden Fachtexte bei der selbstständigen Arbeit an mathematischen Problemen.</td></tr>
</table>

3.2.2 Inhaltsbezogene Kompetenzen für Gymnasium, Gesamtschule, Abendgymnasium und Kolleg

<table>
<tr><td colspan="2">

Leitidee: Funktionaler Zusammenhang

Funktionen eignen sich zur Modellierung einer Vielzahl von Realsituationen. Mit den Mitteln der Differenzial- und Integralrechnung werden zum einen Veränderungen beschrieben und analysiert, zum anderen Bestände rekonstruiert. Die vertiefende Behandlung von funktionalen Zusammenhängen unter Nutzung weiterer Ableitungsregeln und der Entwicklung der Integralrechnung hat zum Ziel, unterschiedliche Typen mathematischer Probleme bearbeiten zu können. Hierzu gehören auch Optimierungsprobleme.
Funktionale Zusammenhänge haben in der Stochastik eine wesentliche Bedeutung bei der Entwicklung und Analyse von Zufallsgrößen und der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten.

</td></tr>
<tr><td>grundlegendes Anforderungsniveau</td><td>erhöhtes Anforderungsniveau</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Die Schülerinnen und Schüler …

- geben die maximale Definitionsmenge von Funktionen – auch in Sachsituationen – an.
- kennen abschnittsweise definierte Funktionen.
- nutzen die Stetigkeit, Differenzierbarkeit und das Krümmungsverhalten zur Analyse und Synthese von abschnittsweise definierten Funktionen.
- untersuchen das Grenzverhalten von Funktionen unter Berücksichtigung von Polstellen und waagerechten Asymptoten der zugehörigen Graphen.
- erkennen Symmetrien von Graphen und weisen vorhandene Punktsymmetrie zum Ursprung bzw. Achsensymmetrie zur y-Achse nach.
- erkennen Monotonie- und Krümmungsverhalten von Graphen und nutzen dies zur Begründung der Existenz von Extrem- und Wendepunkten.
- nutzen notwendige Bedingungen sowie inhaltliche Begründungen zur Bestimmung von lokalen Extrem- und Wendestellen.
- kennen Verknüpfungen und Verkettungen der e-Funktion mit ganzrationalen Funktionen zur Beschreibung von inner- und außermathematischen Problemen.
- verwenden Produkt-, Quotienten- und Kettenregel beim Ableiten von Funktionen.
- verwenden das Modell des begrenzten und das Modell des logistischen Wachstums.
- nutzen bei Funktionen und Scharen ganzrationaler Funktionen charakteristische Merkmale wie Extremstellen, Wendestellen und Krümmungsverhalten zum Lösen inner- und außermathematischer Probleme.
- führen Parametervariationen zur Anpassung von Funktionen an Daten durch.
- deuten das bestimmte Integral als aus Änderungen rekonstruierter Bestand und als Flächeninhalt.
- kennen Stammfunktionen für die Funktionen $x \to e^x$, $x \to \sin(x)$, $x \to \sqrt{x}$ und $x \to x^n$; $n \in \mathbb{Z}$, darunter auch $x \to \frac{1}{x}$.

</td></tr>
</table>

• kennen den Zusammenhang zwischen Differenzieren und Integrieren. • nutzen den Zusammenhang zwischen Ableitung und Integral zur Bestätigung von Stammfunktionen. • berechnen unbestimmte Integrale mithilfe der Summen- und Faktorregel. • wenden Rechengesetze für bestimmte Integrale an. • beschreiben Zufallsgrößen als Funktionen und stellen diese tabellarisch und grafisch dar. • stellen Binomialverteilungen auch unter Verwendung der eingeführten Technologie grafisch dar.	
	• nutzen bei Scharen von Funktionen, die durch Verknüpfungen und Verkettungen der e-Funktion mit ganzrationalen Funktionen entstehen, charakteristische Merkmale zum Lösen inner- und außermathematischer Probleme. • erkennen den Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion und deuten die resultierende Differenzialgleichung im Sachkontext der Wachstumsmodelle. • interpretieren uneigentliche Integrale als Grenzwerte sowohl von Beständen als auch von Flächeninhalten. • begründen geometrisch anschaulich den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung. • begründen die Volumenformel für Körper, die durch Rotation um die x-Achse entstehen. • grenzen diskrete von stetigen Zufallsgrößen ab. • verwenden die Normalverteilung als spezielle stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung.

<table>
<tr><td colspan="2">Leitidee: Räumliches Strukturieren/Koordinatisieren

Mithilfe der Koordinatisierung entwickeln die Schülerinnen und Schüler ihr räumliches Vorstellungsvermögen weiter. Die Methoden der Vektorrechnung ermöglichen die Beschreibung und Untersuchung einfacher geometrischer Objekte und ihrer Lagebeziehungen im Raum. Die erarbeiteten Werkzeuge erlauben eine Modellierung von Realsituationen.</td></tr>
<tr><td>grundlegendes Anforderungsniveau</td><td>erhöhtes Anforderungsniveau</td></tr>
<tr><td colspan="2">Die Schülerinnen und Schüler …
• nutzen die bildliche Darstellung und Koordinatisierung zur Beschreibung und Lösung von inner- und außermathematischen Problemen in Ebene und Raum.
• wenden die Addition, Subtraktion und skalare Multiplikation von Vektoren an und veranschaulichen sie geometrisch.
• erkennen die Kollinearität zweier Vektoren.
• wenden Vektoren beim Arbeiten mit geradlinig begrenzten geometrischen Objekten an.
• beschreiben Geraden und Ebenen durch Gleichungen in Parameterform.
• erfassen und begründen die unterschiedlichen Lagebeziehungen von Geraden sowie von Gerade und Ebene und lösen Schnittprobleme.
• deuten das Skalarprodukt geometrisch.</td></tr>
<tr><td></td><td>• erfassen und begründen die unterschiedlichen Lagebeziehungen von Ebenen und lösen Schnittprobleme.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Leitidee: Algorithmus

Mathematische Verfahren können in Form von Algorithmen systematisiert werden. Diese Algorithmen produzieren verlässliche Ergebnisse. Die Schülerinnen und Schüler entwickeln ein Verständnis für den Ablauf, die Ergebnisdarstellung sowie die Bedingungen und Grenzen der verwendeten Algorithmen. Die eingeführte Technologie entlastet den Nutzer bei der wiederholten Ausführung.
Die Arbeit mit der eingeführten Technologie macht also ein grundlegendes Verständnis für die Idee des Algorithmus notwendig und fördert dieses zugleich.</td></tr>
<tr><td>grundlegendes Anforderungsniveau</td><td>erhöhtes Anforderungsniveau</td></tr>
<tr><td colspan="2">Die Schülerinnen und Schüler …
• kennen den GAUSS-Algorithmus als ein Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme.
• lösen lineare Gleichungssysteme mit der eingeführten Technologie.
• beherrschen die Addition, Subtraktion und skalare Multiplikation von Matrizen.
• nutzen die Matrizenmultiplikation und inverse Matrizen.
• wenden Potenzen von Matrizen bei mehrstufigen Prozessen an und interpretieren Grenzmatrizen sowie Fixvektoren.</td></tr>
<tr><td></td><td>• erkennen zyklisches Verhalten und interpretieren dies im Sachzusammenhang.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">

Leitidee: Daten und Zufall

Erhobene Daten lassen sich mithilfe statistischer Darstellungen grafisch sowie mittels statistischer Kenngrößen numerisch zusammenfassend beschreiben und interpretieren. Durch Verfahren und Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung können dem Zufall unterworfene Vorgänge qualitativ erfasst werden. Auf diese Weise kann man zu fundierten und kontrollierten Urteilen in realen Entscheidungssituationen gelangen. Die eingeführte Technologie bietet die Möglichkeit, umfangreiches Datenmaterial zu bearbeiten und zu analysieren.

</td></tr>
<tr><th>grundlegendes Anforderungsniveau</th><th>erhöhtes Anforderungsniveau</th></tr>
<tr><td colspan="2">

Die Schülerinnen und Schüler …

- stellen Häufigkeits- und Wahrscheinlichkeitsverteilungen in Histogrammen dar, interpretieren und nutzen diese Darstellungen.
- charakterisieren und interpretieren Datenmaterial mithilfe der Kenngrößen arithmetisches Mittel, Standardabweichung s_n und Stichprobenumfang und setzen die eingeführte Technologie sinnvoll ein.
- verwenden die Grundbegriffe Ergebnis, Ereignis, Ergebnismenge zur Beschreibung von Zufallsexperimenten.
- nutzen Zufallsgrößen zur sachgerechten Strukturierung der Ergebnismenge eines Zufallsexperiments.
- charakterisieren Wahrscheinlichkeitsverteilungen anhand der Kenngrößen Erwartungswert μ und Standardabweichung σ, berechnen diese auch unter Verwendung der eingeführten Technologie und nutzen sie für Interpretationen.
- kennen das Modell der BERNOULLI-Kette, können in diesem Modell rechnen und es zum Modellieren sachgerecht anwenden.
- nutzen den Erwartungswert und die Standardabweichung einer binomialverteilten Zufallsgröße für Interpretationen.
- können für große n auf der Grundlage der σ-Umgebungen um den Erwartungswert für binomialverteilte Zufallsgrößen Wahrscheinlichkeitsaussagen treffen.
- unterscheiden zwischen Grundgesamtheit und repräsentativer Stichprobe.

</td></tr>
<tr><td>

- schließen von der Stichprobe auf die Gesamtheit, indem sie
  - für binomialverteilte Zufallsgrößen, ausgehend von einer Stichprobe, Schätzwerte für den unbekannten Parameter p der zugrunde liegenden Gesamtheit bestimmen;
  - Vertrauensintervalle um diese Schätzwerte zu vorgegebener Vertrauenswahrscheinlichkeit (90 %, 95 %, 99 %) unter Nutzung von σ-Umgebungen bestimmen.

</td><td>

- verwenden die Normalverteilung als Näherung für die Binomialverteilung.
- schließen von der Stichprobe auf die Gesamtheit, indem sie
  - für binomialverteilte Zufallsgrößen, ausgehend von einer Stichprobe, Schätzwerte für den unbekannten Parameter p der zugrunde liegenden Gesamtheit bestimmen;
  - Vertrauensintervalle um diese Schätzwerte zu beliebig vorgegebener Vertrauenswahrscheinlichkeit unter Nutzung der Normalverteilung bestimmen.

</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Leitidee: Messen

Die Schülerinnen und Schüler erfahren das Messen als universelles Werkzeug zum Quantifizieren und Vergleichen. In allen drei Sachgebieten stellt die Mathematik geeignete Verfahren zum Messen zur Verfügung.
Die eingeführte Technologie ermöglicht Berechnungen in komplexeren Situationen und erleichtert so die Konzentration auf das Problem im Sachzusammenhang.</td></tr>
<tr><td>grundlegendes Anforderungsniveau</td><td>erhöhtes Anforderungsniveau</td></tr>
<tr><td colspan="2">Die Schülerinnen und Schüler …
• nutzen das Skalarprodukt zur Bestimmung der Winkelgröße zwischen Vektoren.
• bestimmen Streckenlängen im Raum.
• berechnen Bestände aus Änderungsraten.
• bestimmen Flächeninhalte begrenzter Flächen.
• kennen und bestimmen das arithmetische Mittel als Lagemaß und die empirische Standardabweichung s_n als Streumaß einer Stichprobe.
• berechnen Erwartungswert und Standardabweichung σ einer binomialverteilten Zufallsgröße.</td></tr>
<tr><td></td><td>• bestimmen Volumen von Körpern, die durch Rotation um die x-Achse entstehen.
• bestimmen Flächeninhalte unbegrenzter Flächen.</td></tr>
</table>

3.2.3 Inhaltsbezogene Kompetenzen für das Fachgymnasium[7]

Leitidee: Funktionaler Zusammenhang

Funktionen eignen sich zur Modellierung einer Vielzahl von Realsituationen. Mit den Mitteln der Differenzial- und Integralrechnung werden zum einen Veränderungen beschrieben und analysiert, zum anderen Bestände rekonstruiert. Die vertiefende Behandlung von funktionalen Zusammenhängen unter Nutzung weiterer Ableitungsregeln und der Entwicklung der Integralrechnung hat zum Ziel, unterschiedliche Typen mathematischer Probleme bearbeiten zu können. Hierzu gehören auch Optimierungsprobleme.

Funktionale Zusammenhänge haben in der Stochastik eine wesentliche Bedeutung bei der Entwicklung und Analyse von Zufallsgrößen und der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten.

grundlegendes Anforderungsniveau	erhöhtes Anforderungsniveau

Die Schülerinnen und Schüler …

- geben die maximale Definitionsmenge von Funktionen – auch in Sachsituationen – an.
- kennen abschnittsweise definierte Funktionen (nur FG T).
- nutzen die Stetigkeit, Differenzierbarkeit und das Krümmungsverhalten zur Analyse und Synthese von abschnittsweise definierten Funktionen (nur FG T).
- untersuchen das Grenzverhalten von Funktionen unter Berücksichtigung von Polstellen und waagerechten Asymptoten der zugehörigen Graphen.
- erkennen Symmetrien von Graphen und weisen vorhandene Punktsymmetrie zum Ursprung bzw. Achsensymmetrie zur y-Achse nach.
- erkennen Monotonie- und Krümmungsverhalten von Graphen und nutzen dies zur Begründung der Existenz von Extrem- und Wendepunkten.
- nutzen notwendige Bedingungen sowie inhaltliche Begründungen zur Bestimmung von lokalen Extrem- und Wendestellen.
- kennen Verknüpfungen und Verkettungen der e-Funktion mit ganzrationalen Funktionen zur Beschreibung von inner- und außermathematischen Problemen.
- verwenden Produkt-, Quotienten- und Kettenregel beim Ableiten von Funktionen.
- verwenden das Modell des begrenzten und das Modell des logistischen Wachstums.
- nutzen bei Funktionen und Scharen ganzrationaler Funktionen charakteristische Merkmale wie Extremstellen, Wendestellen und Krümmungsverhalten zum Lösen inner- und außermathematischer Probleme.
- führen Parametervariationen zur Anpassung von Funktionen an Daten durch.
- benutzen Graphen linearer Funktionen zur Beschreibung und Lösung von Optimierungsproblemen (nur FG W und FG GuS).
- deuten das bestimmte Integral als aus Änderungen rekonstruierter Bestand und als Flächeninhalt.

[7] Fachrichtung Gesundheit und Soziales: FG GuS, Fachrichtung Technik: FG T, Fachrichtung Wirtschaft: FG W

• kennen Stammfunktionen für die Funktionen $x \to e^x$, $x \to \sin(x)$, $x \to \sqrt{x}$ und $x \to x^n;\ n \in \mathbb{Z}$, darunter auch $x \to \frac{1}{x}$. • kennen den Zusammenhang zwischen Differenzieren und Integrieren. • nutzen den Zusammenhang zwischen Ableitung und Integral zur Bestätigung von Stammfunktionen. • berechnen unbestimmte Integrale mithilfe der Summen- und Faktorregel. • wenden Rechengesetze für bestimmte Integrale an. • beschreiben Zufallsgrößen als Funktionen und stellen diese tabellarisch und grafisch dar. • stellen Binomialverteilungen auch unter Verwendung der eingeführten Technologie grafisch dar.	
	• nutzen bei Scharen von Funktionen, die durch Verknüpfungen und Verkettungen der e-Funktion mit ganzrationalen Funktionen entstehen, charakteristische Merkmale zum Lösen inner- und außermathematischer Probleme. • erkennen den Zusammenhang zwischen Funktion und Ableitungsfunktion und deuten die resultierende Differenzialgleichung im Sachkontext der Wachstumsmodelle. • interpretieren uneigentliche Integrale als Grenzwerte sowohl von Beständen als auch von Flächeninhalten. • begründen geometrisch anschaulich den Hauptsatz der Differenzial- und Integralrechnung. • interpretieren Flächen als Konsumenten- und Produzentenrente (nur FG W und FG GuS). • begründen die Volumenformel für Körper, die durch Rotation um die x-Achse entstehen (nur FG T). • grenzen diskrete von stetigen Zufallsgrößen ab. • verwenden die Normalverteilung als spezielle stetige Wahrscheinlichkeitsverteilung.

<table>
<tr><td colspan="2">Leitidee: Räumliches Strukturieren/Koordinatisieren (nur FG T)

Mithilfe der Koordinatisierung entwickeln die Schülerinnen und Schüler ihr räumliches Vorstellungsvermögen weiter. Die Methoden der Vektorrechnung ermöglichen die Beschreibung und Untersuchung einfacher geometrischer Objekte und ihrer Lagebeziehungen im Raum. Die erarbeiteten Werkzeuge erlauben eine Modellierung von Realsituationen.</td></tr>
<tr><td>grundlegendes Anforderungsniveau</td><td>erhöhtes Anforderungsniveau</td></tr>
<tr><td colspan="2">Die Schülerinnen und Schüler …
• nutzen die bildliche Darstellung und Koordinatisierung zur Beschreibung und Lösung von inner- und außermathematischen Problemen in Ebene und Raum, sowohl bildlich als auch mithilfe von Koordinaten.
• wenden die Addition, Subtraktion und skalare Multiplikation von Vektoren an und veranschaulichen sie geometrisch.
• erkennen die Kollinearität zweier Vektoren.
• wenden Vektoren beim Arbeiten mit geradlinig begrenzten geometrischen Objekten an.
• beschreiben Geraden und Ebenen durch Gleichungen in Parameterform.
• erfassen und begründen die unterschiedlichen Lagebeziehungen von Geraden sowie von Gerade und Ebene und lösen Schnittprobleme.
• deuten das Skalarprodukt geometrisch und wenden es in Sachzusammenhängen an.
• deuten das Vektorprodukt geometrisch und wenden es in Sachzusammenhängen an.
• beschreiben Ebenen durch Gleichungen in Normalenform und allgemeiner Koordinatenform.
• nutzen den Zusammenhang zwischen Normalenform und allgemeiner Koordinatenform.
• erläutern und nutzen Verfahren zur Berechnung von Abständen zwischen Punkten und zwischen Ebenen sowie zwischen Punkt und Gerade, Punkt und Ebene sowie Gerade und Ebene.
• nutzen Abstandsbestimmungen zur Ermittlung von Flächen- und Rauminhalten.</td></tr>
<tr><td></td><td>• erfassen und begründen die unterschiedlichen Lagebeziehungen von Ebenen und lösen Schnittprobleme.
• erläutern und nutzen Verfahren zur Bestimmung von Abständen von Geraden.</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">

Leitidee: Algorithmus

Mathematische Verfahren können in Form von Algorithmen systematisiert werden. Diese Algorithmen produzieren verlässliche Ergebnisse. Die Schülerinnen und Schüler entwickeln ein Verständnis für den Ablauf, die Ergebnisdarstellung sowie die Bedingungen und Grenzen der verwendeten Algorithmen. Die eingeführte Technologie entlastet den Nutzer bei der wiederholten Ausführung.

Die Arbeit mit der eingeführten Technologie macht also ein grundlegendes Verständnis für die Idee des Algorithmus notwendig und fördert dieses zugleich.
</td></tr>
<tr><td>grundlegendes Anforderungsniveau</td><td>erhöhtes Anforderungsniveau</td></tr>
<tr><td colspan="2">

Die Schülerinnen und Schüler …

- kennen den GAUSS-Algorithmus als ein Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme.
- lösen lineare Gleichungssysteme mit der eingeführten Technologie.
- beherrschen die Addition, Subtraktion und skalare Multiplikation von Matrizen (nur FG W und FG GuS).
- nutzen die Matrizenmultiplikation und inverse Matrizen (nur FG W und FG GuS).
- wenden Potenzen von Matrizen bei mehrstufigen Prozessen an und interpretieren Grenzmatrizen sowie Fixvektoren (nur FG W und FG GuS).
- wenden Matrizen bei Input-Output-Analysen an (nur FG W und FG GuS).
</td></tr>
<tr><td></td><td>

- erkennen zyklisches Verhalten und interpretieren dies im Sachzusammenhang (nur FG W und FG GuS).
</td></tr>
</table>

Leitidee: Daten und Zufall

Erhobene Daten lassen sich mithilfe statistischer Darstellungen grafisch sowie mittels statistischer Kenngrößen numerisch zusammenfassend beschreiben und interpretieren. Durch Verfahren und Begriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung können dem Zufall unterworfene Vorgänge qualitativ erfasst werden. Auf diese Weise kann man zu fundierten und kontrollierten Urteilen in realen Entscheidungssituationen gelangen. Die eingeführte Technologie bietet die Möglichkeit, umfangreiches Datenmaterial zu bearbeiten und zu analysieren.

grundlegendes Anforderungsniveau	erhöhtes Anforderungsniveau

Die Schülerinnen und Schüler …

- stellen Häufigkeits- und Wahrscheinlichkeitsverteilungen in Histogrammen dar, interpretieren und nutzen diese Darstellungen.
- charakterisieren und interpretieren Datenmaterial mithilfe der Kenngrößen arithmetisches Mittel, Standardabweichung s_n und Stichprobenumfang und setzen die eingeführte Technologie sinnvoll ein.
- verwenden die Grundbegriffe Ergebnis, Ereignis, Ergebnismenge zur Beschreibung von Zufallsexperimenten.
- nutzen Zufallsgrößen zur sachgerechten Strukturierung der Ergebnismenge eines Zufallsexperiments.
- charakterisieren Wahrscheinlichkeitsverteilungen anhand der Kenngrößen Erwartungswert μ und Standardabweichung σ, berechnen diese auch unter Verwendung der eingeführten Technologie und nutzen sie für Interpretationen.
- kennen das Modell der BERNOULLI-Kette, können in diesem Modell rechnen und es zum Modellieren sachgerecht anwenden.
- nutzen den Erwartungswert und die Standardabweichung einer binomialverteilten Zufallsgröße für Interpretationen.
- können für große n auf der Grundlage der σ-Umgebungen um den Erwartungswert für binomialverteilte Zufallsgrößen Wahrscheinlichkeitsaussagen treffen.
- unterscheiden zwischen Grundgesamtheit und repräsentativer Stichprobe.

grundlegendes Anforderungsniveau	erhöhtes Anforderungsniveau
• schließen von der Stichprobe auf die Gesamtheit, indem sie o für binomialverteilte Zufallsgrößen, ausgehend von einer Stichprobe, Schätzwerte für den unbekannten Parameter p der zugrunde liegenden Gesamtheit bestimmen; o Vertrauensintervalle um diese Schätzwerte zu vorgegebener Vertrauenswahrscheinlichkeit (90 %, 95 %, 99 %) unter Nutzung von σ-Umgebungen bestimmen.	• verwenden die Normalverteilung als Näherung für die Binomialverteilung. • schließen von der Stichprobe auf die Gesamtheit, indem sie o für binomialverteilte Zufallsgrößen, ausgehend von einer Stichprobe, Schätzwerte für den unbekannten Parameter p der zugrunde liegenden Gesamtheit bestimmen; o Vertrauensintervalle um diese Schätzwerte zu beliebig vorgegebener Vertrauenswahrscheinlichkeit unter Nutzung der Normalverteilung bestimmen.

Leitidee: Messen Die Schülerinnen und Schüler erfahren das Messen als universelles Werkzeug zum Quantifizieren und Vergleichen. In allen drei Sachgebieten stellt die Mathematik geeignete Verfahren zum Messen zur Verfügung. Die eingeführte Technologie ermöglicht Berechnungen in komplexeren Situationen und erleichtert so die Konzentration auf das Problem im Sachzusammenhang.	
grundlegendes Anforderungsniveau	erhöhtes Anforderungsniveau
Die Schülerinnen und Schüler … • nutzen das Skalarprodukt zur Bestimmung der Winkelgröße zwischen Vektoren (nur FG T). • bestimmen Streckenlängen im Raum (nur FG T). • berechnen Bestände aus Änderungsraten. • bestimmen Flächeninhalte begrenzter Flächen. • kennen und bestimmen das arithmetische Mittel als Lagemaß und die empirische Standardabweichung s_n als Streumaß einer Stichprobe. • berechnen Erwartungswert und Standardabweichung σ einer binomialverteilten Zufallsgröße.	
	• bestimmen Volumen von Körpern, die durch Rotation um die x-Achse entstehen (nur FG T). • bestimmen Flächeninhalte unbegrenzter Flächen.

3.3 Lernbereiche

Die Beschäftigung mit Mathematik wird von Schülerinnen und Schülern immer dann als sinnvoll angesehen, wenn die Probleme zur Auseinandersetzung motivieren. Dieses kann mit Anwendungsorientierung genauso geschehen wie mit innermathematischen Fragestellungen. Ausgehend von konkreten Situationen wird ein grundlegendes Verständnis für Prinzipien, Techniken und Methoden geschaffen. Eine vertiefende, häufig innermathematische Betrachtung führt zu einer zunehmenden Abstraktion und zu einer fachspezifischen Begrifflichkeit.

Durch die Konzentration auf das Exemplarische mit großer Tragweite kann der vermeintlichen Stofffülle begegnet werden. Daher werden die Inhalte der Sachgebiete Analysis, Analytische Geometrie / Lineare Algebra und Stochastik in Lernbereiche organisiert, in denen die zu erarbeitenden mathematischen Begriffe eingeordnet sind.

Die Analysis umfasst die drei Lernbereiche **Von der Änderung zum Bestand, Wachstumsmodelle** und **Kurvenanpassung.** Die Analytische Geometrie / Lineare Algebra wird geprägt durch die Lernbereiche **Raumanschauung und Koordinatisierung** sowie **Mehrstufige Prozesse**. Die Stochastik gliedert sich in die drei Bereiche **Daten darstellen und auswerten, Mit dem Zufall rechnen** und **Daten beurteilen.**

Die Lernbereiche sind aufgrund der besonderen Vorgaben für Fachgymnasien im Bereich der Analysis und der Analytischen Geometrie bzw. Linearen Algebra unterschiedlich. Daher werden die Lernbereiche für die Fachgymnasien insgesamt im Kapitel 3.3.2 gesondert aufgeführt. Dabei wird auch noch auf die intern zu unterscheidenden Besonderheiten hinsichtlich des Fachgymnasiums Wirtschaft, des Fachgymnasiums Gesundheit u. Soziales sowie des Fachgymnasiums Technik verwiesen.

Die Beschreibung der Lernbereiche zeigt jeweils die Möglichkeit eines didaktischen und methodischen Grundkonzepts, das durch die Auflistung mathematischer Werkzeuge ergänzt wird. Beide zusammen spiegeln weitgehend die zu erwerbenden inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen wider. Die Stichpunkte der Gesamtzeile gelten für beide Anforderungsniveaus, die der darauffolgenden rechten Spalte für Unterricht auf erhöhtem Anforderungsniveau.

Die über den Kern hinausgehenden inhaltsbezogenen Kompetenzen weisen auf Ergänzungen hin, die die mathematischen Werkzeuge hinsichtlich eines tieferen und komplexeren Verständnisses der Begrifflichkeiten erweitern, aber nicht unterrichtet werden müssen. Jede einzelne Ergänzung rundet einerseits die Sicht auf die Mathematik zu einem umfassenderen Bild ab, zeigt aber andererseits auch klar die Abgrenzung zu den im Kern thematisierten inhaltsbezogenen Kompetenzen.

Hinweise zum Technologieeinsatz sind keine verpflichtenden Angaben, sondern weisen in den jeweiligen Lernbereichen auf Gelegenheiten hin, die angegebenen Rechnerfertigkeiten zu vermitteln bzw. sinnvoll anzuwenden. Bezug genommen wird dabei auf die vom Kultusministerium im September 2007 herausgegebenen Listen, in denen beschrieben wird, welche Tätigkeiten und Fähigkeiten im Umgang mit mathematischen Sachverhalten durch einen GTR bzw. ein CAS unterstützt werden müssen.

3.3.1 Lernbereiche für Gymnasium, Gesamtschule, Abendgymnasium und Kolleg

Lernbereich: Von der Änderung zum Bestand – Integralrechnung

Ausgehend von realitätsbezogenen Problemstellungen aus den Bereichen

- Zu- und Ablauf (Talsperre, Verkehrsströme),
- Geschwindigkeit – Weg, Fahrtenschreiber

wird eine Grundvorstellung vom Integralbegriff entwickelt. Das Integral wird als aus Änderungen rekonstruierter Bestand gedeutet, der über die Addition von Produkten u. a. zum Flächeninhalt führt. Anhand der grafischen Darstellung von Änderung und Bestand werden die Zusammenhänge entdeckt und argumentativ erklärt. Dabei wird der Bezug zum Vorwissen aus der Differenzialrechnung im Sinne von Rückwärtsarbeiten hergestellt und für die Mathematisierung genutzt.

Die Berechnung von Integralen wird anhand ganzrationaler Funktionen entwickelt und mithilfe der eingeführten Technologie auf weitere Funktionen ausgedehnt.

Im erhöhten Anforderungsniveau erfolgt neben einer formalen Betrachtung der Zusammenhänge und einer Präzisierung der Begriffe auch die Behandlung von Volumen von Rotationskörpern und Grenzwerten von Beständen und Flächeninhalten.

grundlegendes Anforderungsniveau	erhöhtes Anforderungsniveau
– Integralbegriff – Rekonstruktion von Beständen – Zusammenhang zwischen Differenzieren und Integrieren – Stammfunktionen spezieller Funktionen – Summen- und Faktorregel – Unbestimmte Integrale – Rechengesetze für bestimmte Integrale – Inhalte begrenzter Flächen	
	– Geometrische Begründung des Hauptsatzes – Uneigentliche Integrale – Volumen von Rotationskörpern

Leitideen: Messen, Funktionaler Zusammenhang

Im Zusammenhang mit diesem Lernbereich bieten sich als über den Kern hinausgehende Ergänzungen an: Bogenlänge, Mittelwertsatz, Schwerpunkt.

Hinweise zum Technologieeinsatz:

- Arbeiten mit Daten, Darstellung von Punkten durch Datenplots und Regression
- Ermitteln bestimmter Integrale und Flächeninhalte
- Ermitteln von Stammfunktionen (CAS)

<table>
<tr><td colspan="2">Lernbereich: Wachstumsmodelle – Exponentialfunktion</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ausgehend von Beispielen aus den Bereichen
• Bevölkerungswachstum,
• stetige Verzinsung,
• radioaktiver Zerfall
werden die bereits bekannten Wachstumsmodelle – lineares, exponentielles und begrenztes Wachstum – durch das Modell des logistischen Wachstums ergänzt. Der Vergleich und die Interpretation verschiedener Modelle eines Wachstumsprozesses lassen sich besonders einfach mit der Exponentialfunktion zur Basis e durchführen. Die e-Funktion ermöglicht eine funktionale Beschreibung des logistischen Wachstums.
Durch Verknüpfung der e-Funktion mit ganzrationalen Funktionen werden Möglichkeiten geschaffen, Wachstum auf vielfältige Art zu modellieren.
Im erhöhten Anforderungsniveau werden an geeigneten Beispielen aus dem Bereich Wachstum die Zusammenhänge zwischen den entsprechenden Funktionen und ihren Ableitungsfunktionen aufgezeigt und interpretiert, wie sie sich in den dazugehörigen Differenzialgleichungen widerspiegeln.</td></tr>
<tr><td>grundlegendes Anforderungsniveau</td><td>erhöhtes Anforderungsniveau</td></tr>
<tr><td colspan="2">– Begrenztes und logistisches Wachstum
– e-Funktion
– Verknüpfungen/Verkettung mit ganzrationalen Funktionen
– Produkt-, Quotienten- und Kettenregel
– Bedeutung des Wendepunktes und des Krümmungsverhaltens
– Asymptotisches Verhalten
– Definitionsbereich
– Angleichung an Daten durch Parametervariation</td></tr>
<tr><td></td><td>– Differenzialgleichungen ohne Lösungsverfahren
– Funktionenscharen</td></tr>
<tr><td colspan="2">Leitidee: Funktionaler Zusammenhang</td></tr>
<tr><td colspan="2">Im Zusammenhang mit diesem Lernbereich bieten sich als über den Kern hinausgehende Ergänzungen an: Lösungsverfahren einfacher Differenzialgleichungen, Untersuchungen von Logarithmus-Funktionen.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hinweise zum Technologieeinsatz:
– Arbeiten mit Daten, Darstellung von Punkten durch Datenplots und Regression
– Bestimmen von Nullstellen, Extrem- und Wendepunkten
– Grafische Darstellung der Ableitungsfunktion
– Lösen linearer Gleichungssysteme
– Bestimmen von Grenzwerten und algebraische Untersuchung von Scharen (CAS)
– Bestimmen der Ableitungsfunktionen (CAS)</td></tr>
</table>

Lernbereich: Kurvenanpassung – Interpolation	
Ausgehend von Beispielen aus den Bereichen • Trassierung, • Biegelinien werden ganzrationale Funktionen zu vorgegebenen Datenpunkten und/oder Eigenschaften bestimmt. Bei Modellierungen mit abschnittsweise definierten Funktionen sind darüber hinaus an den Übergängen Eigenschaften wie Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Übereinstimmung der zweiten Ableitungen als Bedingungen zu nutzen und im Kontext zu interpretieren. Die Zugänge zu Stetigkeit und Differenzierbarkeit werden auf intuitivem Weg gefunden. Durch Regression gewonnene Funktionen werden zum Vergleich herangezogen. Je nach Anordnung der Lernbereiche kann bei der Beurteilung verschiedener Modellierungen auch ein Flächeninhaltsvergleich als Kriterium herangezogen werden.	
grundlegendes Anforderungsniveau	erhöhtes Anforderungsniveau
– Bestimmung von Funktionen aus gegebenen Eigenschaften – GAUSS-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme – Stetigkeit, Differenzierbarkeit – Abschnittsweise definierte Funktionen – Funktionenscharen	
Leitideen: Funktionaler Zusammenhang, Algorithmus	
Im Zusammenhang mit diesem Lernbereich bieten sich als über den Kern hinausgehende Ergänzungen an: Bogenlänge, Krümmungsmaß und Krümmungskreis.	
Hinweise zum Technologieeinsatz: – Darstellung von Punkten durch Datenplots und Regression – Bestimmen von Nullstellen, Extrem- und Wendepunkten – Grafische Darstellung der Ableitungsfunktion – Lösen linearer Gleichungssysteme – Algebraische Untersuchung von Scharen (CAS) – Bestimmen der Ableitungsfunktionen (CAS)	

Lernbereich: Raumanschauung und Koordinatisierung – Analytische Geometrie / Lineare Strukturen

Ausgehend von der zeichnerischen Darstellung von Körpern werden der Nutzen und die Bedeutung des dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystems für die Orientierung im Raum erkannt.

Durch die Einführung des Vektorbegriffs werden geometrische Zusammenhänge algebraisiert. Dabei besitzen die Parameterformen von Geraden- und Ebenengleichungen eine grundlegende Bedeutung bei der Untersuchung von Lagebeziehungen und der Bestimmung von Schnittmengen.

Das Skalarprodukt und seine geometrische Deutung ermöglichen metrische Betrachtungen und Berechnungen.

<table>
<tr><td>grundlegendes Anforderungsniveau</td><td>erhöhtes Anforderungsniveau</td></tr>
<tr><td colspan="2">
– Punkte im Raum
– Darstellungen im kartesischen Koordinatensystem / Schrägbilder
– Vektoren im Anschauungsraum
– Rechengesetze für Vektoren, Kollinearität zweier Vektoren
– Parametergleichungen von Gerade und Ebene
– Lagebeziehungen und Schnittpunkte
– Skalarprodukt
– Längen von Strecken und Größen von Winkeln zwischen Vektoren
</td></tr>
<tr><td></td><td>– Schnittmengen von Ebenen</td></tr>
</table>

Leitideen: Messen, Räumliches Strukturieren / Koordinatisierung

Im Zusammenhang mit diesem Lernbereich bieten sich als über den Kern hinausgehende Ergänzungen an: Normalen- und Koordinatenform der Ebenengleichung, Kugel, Vektorprodukt.

Hinweise zum Technologieeinsatz:

- Bestimmen der Lösungsmenge sowohl eindeutig als auch nicht eindeutig lösbarer LGS aus dem Bereich der analytischen Geometrie
- Bestimmen des Skalarproduktes je nach Möglichkeiten des Rechners

<table>
<tr><td colspan="2">Lernbereich: Mehrstufige Prozesse – Matrizenrechnung</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ausgehend von Problemstellungen aus dem Bereich der Materialverflechtung werden mehrstufige Prozesse durch Darstellung in Matrizenform strukturiert. In diesem Zusammenhang werden die Rechengesetze für Matrizen einschließlich inverser Matrizen behandelt. Die Behandlung von Problemen zum Käufer- und Wahlverhalten eröffnet eine weitere Sichtweise auf Matrizen, indem sich wiederholende Prozesse hinsichtlich einer Langzeitprognose analysiert werden.
Auf erhöhtem Anforderungsniveau führen Anwendungen aus dem Bereich der Populationsentwicklung auch zur Betrachtung zyklischer Prozesse.</td></tr>
<tr><td>grundlegendes Anforderungsniveau</td><td>erhöhtes Anforderungsniveau</td></tr>
<tr><td colspan="2">– Matrizen und Prozessdiagramme zur strukturierten Darstellung von Daten
– Rechengesetze für Matrizen, auch inverse Matrizen
– Grenzmatrix und Fixvektor im Sachzusammenhang mit Käufer- und Wahlverhalten</td></tr>
<tr><td></td><td>– Populationsentwicklung
– Zyklische Prozesse</td></tr>
<tr><td colspan="2">Leitidee: Algorithmus</td></tr>
<tr><td colspan="2">Im Zusammenhang mit diesem Lernbereich bieten sich als über den Kern hinausgehende Ergänzungen an: LEONTIEF-Modell, Transportprobleme.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hinweise zum Technologieeinsatz:
– Bestimmen der Lösungsmenge sowohl eindeutig als auch nicht eindeutig lösbarer LGS
– Operationen mit Matrizen</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Lernbereich: Daten darstellen und auswerten – Beschreibende Statistik</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ausgehend von Daten zu Sachkontexten – wie z. B. Lebenserwartung von Männern und Frauen, Reaktionstest – werden zu deren Vergleich als Kenngrößen das arithmetische Mittel und die empirische Standardabweichung s_n erarbeitet. Dabei sind die Darstellung der Daten in einem Histogramm und der Einsatz der eingeführten Technologie wichtige Hilfsmittel.</td></tr>
<tr><td>grundlegendes Anforderungsniveau</td><td>erhöhtes Anforderungsniveau</td></tr>
<tr><td colspan="2">– Histogramm
– Standardabweichung</td></tr>
<tr><td colspan="2">Leitideen: Daten und Zufall, Messen</td></tr>
<tr><td colspan="2">Im Zusammenhang mit diesem Lernbereich bieten sich als über den Kern hinausgehende Ergänzungen an: Planung und Durchführung von Datenerhebungen, Simulation von Zufallsexperimenten, Regression und Korrelation.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hinweise zum Technologieeinsatz:
– Arbeiten mit Daten
– Darstellen von Daten durch Datenplots und Histogramme
– Bestimmen von arithmetischem Mittel und Standardabweichung</td></tr>
</table>

Lernbereich: Mit dem Zufall rechnen – Wahrscheinlichkeitsrechnung	
Ausgehend von Zufallsexperimenten werden Möglichkeiten zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten betrachtet. Durch Zufallsgrößen werden Ergebnismengen strukturiert. Die bekannten Kenngrößen für Häufigkeitsverteilungen werden aufgegriffen, auf Wahrscheinlichkeitsverteilungen übertragen und führen zum Erwartungswert μ und zur Standardabweichung σ. Die BERNOULLI-Kette dient als ein Modell zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten. Umgekehrt lassen sich zu einer gegebenen Wahrscheinlichkeit nur von σ abhängige Umgebungen um den Erwartungswert bestimmen. Im erhöhten Anforderungsniveau werden diskrete von stetigen Zufallsgrößen abgegrenzt und die Normalverteilung als ein Beispiel für eine stetige Verteilung verwendet.	
grundlegendes Anforderungsniveau	erhöhtes Anforderungsniveau
– Ergebnis, Ereignis, Ergebnismenge – Zufallsgröße – Wahrscheinlichkeitsverteilung – Erwartungswert und Standardabweichung – BERNOULLI-Kette und Binomialverteilung – σ -Umgebungen	
	– Stetige Zufallsgrößen – Normalverteilung
Leitideen: Daten und Zufall, Messen, Funktionaler Zusammenhang	
Im Zusammenhang mit diesem Lernbereich bieten sich als über den Kern hinausgehende Ergänzungen an: weitere diskrete und stetige Verteilungen.	
Hinweise zum Technologieeinsatz: – Berechnen von Fakultäten und Binomialkoeffizienten – Bestimmen von Wahrscheinlichkeiten einer Binomialverteilung und der Normalverteilung – Bestimmen von kumulierten Wahrscheinlichkeiten bei Binomialverteilungen und Normalverteilungen – Grafische Darstellungen von Verteilungen	

<table>
<tr><td colspan="2">Lernbereich: Daten beurteilen – Beurteilende Statistik</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ausgehend von Stichproben wird das Modell der BERNOULLI-Kette genutzt, um für eine unbekannte Wahrscheinlichkeit Vertrauensintervalle zu bestimmen.
Während im grundlegenden Anforderungsniveau konkrete Vertrauenswahrscheinlichkeiten (90 %, 95 %, 99 %) vorgegeben sind, erfolgt im erhöhten Anforderungsniveau mithilfe der Normalverteilung eine Bestimmung für beliebige Vertrauenswahrscheinlichkeiten.</td></tr>
<tr><td>grundlegendes Anforderungsniveau</td><td>erhöhtes Anforderungsniveau</td></tr>
<tr><td colspan="2">– Grundgesamtheit
– Repräsentative Stichprobe
– Bestimmung von Schätzwerten für eine unbekannte Wahrscheinlichkeit</td></tr>
<tr><td>– Vertrauensintervalle zu konkreten Vertrauenswahrscheinlichkeiten</td><td>– Vertrauensintervalle zu beliebigen Vertrauenswahrscheinlichkeiten</td></tr>
<tr><td colspan="2">Leitideen: Daten und Zufall, Messen</td></tr>
<tr><td colspan="2">Im Zusammenhang mit diesem Lernbereich bieten sich als über den Kern hinausgehende Ergänzungen an: weitere Verfahren der beurteilenden Statistik.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hinweise zum Technologieeinsatz:
– Bestimmen von arithmetischem Mittel und Standardabweichung
– Bestimmen von Vertrauensintervallen je nach Möglichkeiten des Rechners</td></tr>
</table>

3.3.2 Lernbereiche für das Fachgymnasium

Lernbereich: Von der Änderung zum Bestand – Integralrechnung

Ausgehend von realitätsbezogenen Problemstellungen aus den Bereichen

- Zahlungsströme, Grenzkosten, Konsumenten- und Produzentenrente (FG W),
- Beschleunigung – Geschwindigkeit – Weg, Biegelinien, Mechanische Arbeit und Volumenarbeit (FG T)

wird eine Grundvorstellung vom Integralbegriff entwickelt. Das Integral wird als aus Änderungen rekonstruierter Bestand gedeutet, der über die Addition von Produkten u. a. zum Flächeninhalt führt. Anhand der grafischen Darstellung von Änderung und Bestand werden die Zusammenhänge entdeckt und argumentativ erklärt. Dabei wird der Bezug zum Vorwissen aus der Differenzialrechnung im Sinne von Rückwärtsarbeiten hergestellt und für die Mathematisierung genutzt.

Die Berechnung von Integralen wird anhand ganzrationaler Funktionen entwickelt und mithilfe der eingeführten Technologie auf weitere Funktionen ausgedehnt.

Im erhöhten Anforderungsniveau erfolgt neben einer formalen Betrachtung der Zusammenhänge und einer Präzisierung der Begriffe auch die Behandlung von Grenzwerten von Beständen und Flächeninhalten, von Volumen von Rotationskörpern (nur FG T) und der Interpretation bezüglich Konsumenten- und Produzentenrenten (nur FG W und FG GuS).

grundlegendes Anforderungsniveau	erhöhtes Anforderungsniveau
– Integralbegriff – Rekonstruktion von Beständen – Zusammenhang zwischen Differenzieren und Integrieren – Stammfunktionen spezieller Funktionen – Summen- und Faktorregel – Unbestimmte Integrale – Rechengesetze für bestimmte Integrale – Inhalte begrenzter Flächen – Konsumenten- und Produzentenrente (nur FG W und FG GuS)	
	– Geometrische Begründung des Hauptsatzes – Uneigentliche Integrale – Volumen von Rotationskörpern (nur FG T)

Leitideen: Messen, Funktionaler Zusammenhang

Im Zusammenhang mit diesem Lernbereich bieten sich als über den Kern hinausgehende Ergänzungen an: Bogenlänge, Mittelwertsatz, Schwerpunkt.

Hinweise zum Technologieeinsatz:

- Arbeiten mit Daten, Darstellung von Punkten durch Datenplots und Regression
- Ermitteln bestimmter Integrale und Flächeninhalte
- Ermitteln von Stammfunktionen (CAS)

Lernbereich: Wachstumsmodelle – Exponentialfunktion	
Ausgehend von Beispielen aus den Bereichen • Bevölkerungswachstum, • stetige Verzinsung, Produktionslebenszyklus (FG W), • radioaktiver Zerfall, Energiespeicher, Newtonsches Abkühlungsgesetz (FG T) werden die bereits bekannten Wachstumsmodelle – lineares, exponentielles und begrenztes Wachstum – durch das Modell des logistischen Wachstums ergänzt. Der Vergleich und die Interpretation verschiedener Modelle eines Wachstumsprozesses lassen sich besonders einfach mit der Exponentialfunktion zur Basis e durchführen. Die e-Funktion ermöglicht eine funktionale Beschreibung des logistischen Wachstums. Durch Verknüpfung der e-Funktion mit ganzrationalen Funktionen werden Möglichkeiten geschaffen, Wachstum auf vielfältige Art zu modellieren. Im erhöhten Anforderungsniveau werden an geeigneten Beispielen aus dem Bereich Wachstum die Zusammenhänge zwischen den entsprechenden Funktionen und ihren Ableitungsfunktionen aufgezeigt und interpretiert, wie sie sich in den dazugehörigen Differenzialgleichungen widerspiegeln.	
grundlegendes Anforderungsniveau	erhöhtes Anforderungsniveau
– Begrenztes und logistisches Wachstum – e-Funktion – Verknüpfungen/Verkettung mit ganzrationalen Funktionen – Produkt-, Quotienten- und Kettenregel – Bedeutung des Wendepunktes und des Krümmungsverhaltens – Asymptotisches Verhalten – Eingeschränkter Definitionsbereich – Angleichung an Daten durch Parametervariation	
	– Differenzialgleichungen ohne Lösungsverfahren – Funktionenscharen
Leitidee: Funktionaler Zusammenhang	
Im Zusammenhang mit diesem Lernbereich bieten sich als über den Kern hinausgehende Ergänzungen an: Lösungsverfahren einfacher Differenzialgleichungen, Untersuchungen von Logarithmus-Funktionen.	
Hinweise zum Technologieeinsatz: – Arbeiten mit Daten, Darstellung von Punkten durch Datenplots und Regression – Bestimmen von Nullstellen, Extrem- und Wendepunkten – Grafische Darstellung der Ableitungsfunktion – Lösen linearer Gleichungssysteme – Bestimmen von Grenzwerten und algebraische Untersuchung von Scharen (CAS) – Bestimmen der Ableitungsfunktionen (CAS)	

Lernbereich: Kurvenanpassung – Interpolation

nur FG Technik

Ausgehend von Beispielen aus den Bereichen

- Trassierung (Schienen-, Straßen- und Rohrleitungsbau),
- Biegelinien

werden ganzrationale Funktionen zu vorgegebenen Datenpunkten und/oder Eigenschaften bestimmt.

Bei Modellierungen mit abschnittsweise definierten Funktionen sind darüber hinaus an den Übergängen Eigenschaften wie Stetigkeit, Differenzierbarkeit und Übereinstimmung der zweiten Ableitungen als Bedingungen zu nutzen und im Kontext zu interpretieren. Die Zugänge zu Stetigkeit und Differenzierbarkeit werden auf intuitivem Weg gefunden. Durch Regression gewonnene Funktionen werden zum Vergleich herangezogen.

Je nach Anordnung der Lernbereiche kann bei der Beurteilung verschiedener Modellierungen auch ein Flächeninhaltsvergleich als Kriterium herangezogen werden.

grundlegendes Anforderungsniveau	erhöhtes Anforderungsniveau
– Bestimmung von Funktionen aus gegebenen Eigenschaften – GAUSS-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme – Stetigkeit, Differenzierbarkeit – Abschnittsweise definierte Funktionen – Funktionenscharen	

Leitideen: Funktionaler Zusammenhang, Algorithmus

Im Zusammenhang mit diesem Lernbereich bieten sich als über den Kern hinausgehende Ergänzungen an: Bogenlänge, Krümmungsmaß und Krümmungskreis.

Hinweise zum Technologieeinsatz:

- Darstellung von Punkten durch Datenplots und Regression
- Bestimmen von Nullstellen, Extrem- und Wendepunkten
- Grafische Darstellung der Ableitungsfunktion
- Lösen linearer Gleichungssysteme
- Algebraische Untersuchung von Scharen (CAS)
- Bestimmen der Ableitungsfunktionen (CAS)

<table>
<tr><td colspan="2">Lernbereich: Eigenschaften von Funktionen
nur FG Wirtschaft, FG Gesundheit u. Soziales</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ausgehend von Optimierungsproblemen aus den Bereichen
• Kostentheorie (Betriebsoptimum, Betriebsminimum, kurz- und langfristige Preisuntergrenze), Erlöse, Gewinn,
• Minimalkostenkombination,
• Marktgleichgewicht (Angebot und Nachfrage ohne Steuern und Subventionen)
gelangt man zu der Betrachtung von rationalen Funktionen. Die Variation eines Parameters führt zu Funktionenscharen, die im ökonomischen Kontext interpretiert werden.</td></tr>
<tr><td>grundlegendes Anforderungsniveau</td><td>erhöhtes Anforderungsniveau</td></tr>
<tr><td colspan="2">– Bestimmung von Funktionen aus gegebenen Eigenschaften
– GAUSS-Algorithmus als Lösungsverfahren für lineare Gleichungssysteme
– Definitions- und Wertemenge
– Asymptotisches Verhalten
– Polstelle
– Ableitungsregeln
– Extrempunkt
– Wendepunkt</td></tr>
<tr><td></td><td>– Elastizitäten
– Monotonie und Krümmungsverhalten im Sachzusammenhang</td></tr>
<tr><td colspan="2">Leitidee: Funktionaler Zusammenhang, Algorithmus</td></tr>
<tr><td colspan="2">Im Zusammenhang mit diesem Lernbereich bieten sich als über den Kern hinausgehende Ergänzungen an: Wirtschaftlichkeit, Umsatzrentabilität, abschnittsweise definierte Funktionen.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hinweise zum Technologieeinsatz:
– Bestimmen von Nullstellen, Extrem- und Wendepunkten
– Grafische Darstellung der Ableitungsfunktion
– Lösen linearer Gleichungssysteme
– Bestimmen von Grenzwerten und algebraische Untersuchung von Scharen (CAS)
– Bestimmen der Ableitungsfunktionen (CAS)</td></tr>
</table>

Lernbereich: Raumanschauung und Koordinatisierung – Analytische Geometrie / Lineare Strukturen

nur FG Technik

Ausgehend von der zeichnerischen Darstellung von Körpern werden der Nutzen und die Bedeutung des dreidimensionalen kartesischen Koordinatensystems für die Orientierung im Raum erkannt.

Durch die Einführung des Vektorbegriffs werden geometrische Zusammenhänge algebraisiert. Dabei besitzen die Parameterformen von Geraden- und Ebenengleichungen eine grundlegende Bedeutung bei der Untersuchung von Lagebeziehungen und der Bestimmung von Schnittmengen.

Das Skalarprodukt und seine geometrische Deutung ermöglichen metrische Betrachtungen und Berechnungen.

Der Normalenvektor und das Vektorprodukt ermöglichen weitere Betrachtungen zur Bestimmung von Winkeln, Orthogonalitätsuntersuchung und Berechnung von Flächenmaßzahlen.

grundlegendes Anforderungsniveau	erhöhtes Anforderungsniveau
– Punkte im Raum – Darstellungen im kartesischen Koordinatensystem / Schrägbilder – Vektoren im Anschauungsraum – Rechengesetze für Vektoren, Kollinearität zweier Vektoren – Parametergleichungen von Gerade und Ebene – Skalarprodukt – Vektorprodukt – Normalen- und Koordinatenform der Ebenengleichung – Lagebeziehungen und Schnittpunkte – Längen von Strecken und Größen von Winkeln im Raum – Abstandsbestimmungen (ohne windschiefe Geraden)	
	– Abstand windschiefer Geraden – Ebenenscharen

Leitideen: Messen, Räumliches Strukturieren / Koordinatisierung

Im Zusammenhang mit diesem Lernbereich bieten sich als über den Kern hinausgehende Ergänzungen an: Schnittprobleme zwischen Kugeln und Geraden sowie Ebenen.

Hinweise zum Technologieeinsatz:

- Bestimmen der Lösungsmenge sowohl eindeutig als auch nicht eindeutig lösbarer LGS aus dem Bereich der analytischen Geometrie
- Bestimmen der Lösungsmenge linearer Gleichungssysteme mit Parameter
- Bestimmen des Skalarproduktes und Vektorproduktes je nach Möglichkeiten des Rechners

<table>
<tr><td colspan="2">Lernbereich: Mehrstufige Prozesse – Matrizenrechnung
nur FG Wirtschaft und FG Gesundheit u. Soziales</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ausgehend von Problemstellungen aus dem Bereich der Materialverflechtung werden mehrstufige Prozesse durch Darstellung in Matrizenform strukturiert. In diesem Zusammenhang werden die Rechengesetze für Matrizen einschließlich inverser Matrizen behandelt. Die Behandlung von Problemen zum Käufer- und Wahlverhalten eröffnet eine weitere Sichtweise auf Matrizen, indem sich wiederholende Prozesse hinsichtlich einer Langzeitprognose analysiert werden.
Auf erhöhtem Anforderungsniveau führen Anwendungen aus dem Bereich der Populationsentwicklung auch zur Betrachtung zyklischer Prozesse.
Ausgehend von Materialverflechtungen werden lineare Optimierungsprobleme, die sich in grafischer Form lösen lassen, bearbeitet.</td></tr>
<tr><td>grundlegendes Anforderungsniveau</td><td>erhöhtes Anforderungsniveau</td></tr>
<tr><td colspan="2">– Matrizen und Prozessdiagramme zur strukturierten Darstellung von Daten
– Rechengesetze für Matrizen auch inverse Matrizen
– Grenzmatrix und Fixvektor im Zusammenhang mit Käufer- und Wahlverhalten
– LEONTIEF-Modell
– Lineare Optimierung</td></tr>
<tr><td></td><td>– Populationsentwicklung
– Zyklische Prozesse</td></tr>
<tr><td colspan="2">Leitidee: Algorithmus, Funktionaler Zusammenhang</td></tr>
<tr><td colspan="2">Im Zusammenhang mit diesem Lernbereich bieten sich als über den Kern hinausgehende Ergänzungen an: Transportprobleme, Simplexverfahren.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hinweise zum Technologieeinsatz:
– Bestimmen der Lösungsmenge sowohl eindeutig als auch nicht eindeutig lösbarer LGS
– Operationen mit Matrizen</td></tr>
</table>

Lernbereich: Daten darstellen und auswerten – Beschreibende Statistik	
Ausgehend von Daten zu Sachkontexten – wie z. B. Messwerterfassung, Qualitätsevaluation – werden zu deren Vergleich als Kenngrößen das arithmetische Mittel und die empirische Standardabweichung s_n erarbeitet. Dabei sind die Darstellung der Daten in einem Histogramm und der Einsatz der eingeführten Technologie wichtige Hilfsmittel.	
grundlegendes Anforderungsniveau	erhöhtes Anforderungsniveau
– Histogramm – Standardabweichung	
Leitideen: Daten und Zufall, Messen	
Im Zusammenhang mit diesem Lernbereich bieten sich als über den Kern hinausgehende Ergänzungen an: Planung und Durchführung von Datenerhebungen, Regression und Korrelation.	
Hinweise zum Technologieeinsatz: – Arbeiten mit Daten – Darstellen von Daten durch Datenplots und Histogramme – Bestimmen von arithmetischem Mittel und Standardabweichung	

<table>
<tr><td colspan="2">Lernbereich: Mit dem Zufall rechnen – Wahrscheinlichkeitsrechnung</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ausgehend von Zufallsexperimenten aus dem Bereich Qualitätskontrolle werden Möglichkeiten zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten betrachtet. Durch Zufallsgrößen werden Ergebnismengen strukturiert. Die bekannten Kenngrößen für Häufigkeitsverteilungen werden aufgegriffen, auf Wahrscheinlichkeitsverteilungen übertragen und führen zum Erwartungswert μ und zur Standardabweichung σ.
Die BERNOULLI-Kette dient als ein Modell zur Berechnung von Wahrscheinlichkeiten. Umgekehrt lassen sich zu einer gegebenen Wahrscheinlichkeit nur von σ abhängige Umgebungen um den Erwartungswert bestimmen.
Im erhöhten Anforderungsniveau werden diskrete von stetigen Zufallsgrößen abgegrenzt und die Normalverteilung als ein Beispiel für eine stetige Verteilung verwendet.</td></tr>
<tr><td>grundlegendes Anforderungsniveau</td><td>erhöhtes Anforderungsniveau</td></tr>
<tr><td colspan="2">– Ergebnis, Ereignis, Ergebnismenge
– Zufallsgröße
– Wahrscheinlichkeitsverteilung
– Erwartungswert und Standardabweichung
– BERNOULLI-Kette und Binomialverteilung
– σ -Umgebungen</td></tr>
<tr><td></td><td>– Stetige Zufallsgrößen
– Normalverteilung</td></tr>
<tr><td colspan="2">Leitideen: Daten und Zufall, Messen, Funktionaler Zusammenhang</td></tr>
<tr><td colspan="2">Im Zusammenhang mit diesem Lernbereich bieten sich als über den Kern hinausgehende Ergänzungen an: weitere diskrete und stetige Verteilungen.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hinweise zum Technologieeinsatz:
– Berechnen von Fakultäten und Binomialkoeffizienten
– Bestimmen von Wahrscheinlichkeiten einer Binomialverteilung und der Normalverteilung
– Bestimmen von kumulierten Wahrscheinlichkeiten bei Binomialverteilungen und Normalverteilungen
– Grafische Darstellungen von Verteilungen</td></tr>
</table>

<table>
<tr><td colspan="2">Lernbereich: Daten beurteilen – Beurteilende Statistik</td></tr>
<tr><td colspan="2">Ausgehend von Stichproben wird das Modell der BERNOULLI-Kette genutzt, um für eine unbekannte Wahrscheinlichkeit Vertrauensintervalle zu bestimmen.
Während im grundlegenden Anforderungsniveau konkrete Vertrauenswahrscheinlichkeiten (90 %, 95 %, 99 %) vorgegeben sind, erfolgt im erhöhten Anforderungsniveau mithilfe der Normalverteilung eine Bestimmung für beliebige Vertrauenswahrscheinlichkeiten.</td></tr>
<tr><td>grundlegendes Anforderungsniveau</td><td>erhöhtes Anforderungsniveau</td></tr>
<tr><td colspan="2">– Grundgesamtheit
– Repräsentative Stichprobe
– Bestimmung von Schätzwerten für eine unbekannte Wahrscheinlichkeit</td></tr>
<tr><td>– Vertrauensintervalle zu konkreten Vertrauenswahrscheinlichkeiten</td><td>– Vertrauensintervalle zu beliebigen Vertrauenswahrscheinlichkeiten</td></tr>
<tr><td colspan="2">Leitideen: Daten und Zufall, Messen</td></tr>
<tr><td colspan="2">Im Zusammenhang mit diesem Lernbereich bieten sich als über den Kern hinausgehende Ergänzungen an: weitere Verfahren der beurteilenden Statistik.</td></tr>
<tr><td colspan="2">Hinweise zum Technologieeinsatz:
– Bestimmen von arithmetischem Mittel und Standardabweichung
– Bestimmen von Vertrauensintervallen je nach Möglichkeiten des Rechners</td></tr>
</table>

4 Leistungsfeststellung und Leistungsbewertung

Leistungsfeststellungen und Leistungsbewertungen geben den Schülerinnen und Schülern und deren Erziehungsberechtigten Rückmeldungen über den Erwerb der inhalts- und prozessbezogenen Kompetenzen. Den Lehrkräften geben sie Orientierung für die weitere Planung des Unterrichts sowie für notwendige Maßnahmen zur individuellen Förderung.
Leistungen im Unterricht werden in allen Kompetenzbereichen eines Faches festgestellt. Dabei ist zu bedenken, dass die im Kerncurriculum formulierten erwarteten Kompetenzen die sozialen und personalen Kompetenzen, die über das Fachliche hinausgehen, nur in Ansätzen erfassen.

Grundsätzlich ist zwischen Lern- und Leistungssituationen zu unterscheiden. In Lernsituationen ist das Ziel der Kompetenzerwerb. Fehler und Umwege dienen den Schülerinnen und Schülern als Erkenntnismittel, den Lehrkräften geben sie Hinweise für die weitere Unterrichtsplanung. Das Erkennen von Fehlern und der produktive Umgang mit ihnen sind konstruktiver Teil des Lernprozesses. Für den weiteren Lernfortschritt ist es wichtig, bereits erworbene Kompetenzen herauszustellen und Schülerinnen und Schüler zum Weiterlernen zu ermutigen. Dies schließt die Förderung der Fähigkeit zur Selbsteinschätzung der Leistung ein.

Ein an Kompetenzerwerb orientierter Unterricht bietet den Schülerinnen und Schülern durch geeignete Aufgaben einerseits ausreichend Gelegenheiten, Problemlösungen zu erproben, andererseits fordert er den Kompetenznachweis in anspruchsvollen Leistungssituationen ein. Leistungs- und Überprüfungssituationen sollen die Verfügbarkeit der erwarteten Kompetenzen nachweisen.

Für eine transparente Leistungsbewertung sind den Lernenden die Beurteilungskriterien rechtzeitig mitzuteilen. Dabei ist zu berücksichtigen, dass nicht nur die Quantität, sondern auch die Qualität der Beiträge für die Beurteilung maßgeblich ist. Die Schülerinnen und Schüler weisen ihren Kompetenzerwerb durch schriftliche Arbeiten (Klausuren) und durch Mitarbeit im Unterricht nach. Ausgehend von der kontinuierlichen Beobachtung der Schülerinnen und Schüler im Lernprozess und ihrer persönlichen Lernfortschritte sind die Ergebnisse der Klausuren und die Mitarbeit im Unterricht zur Leistungsfeststellung heranzuziehen. Im Laufe des Schulhalbjahres sind die Lernenden mehrfach über ihren aktuellen Leistungsstand zu informieren.

Zur Mitarbeit im Unterricht (mündliche und andere fachspezifische Leistungen) zählen z. B.:

- sachbezogene und kooperative Teilnahme am Unterrichtsgespräch,
- Erheben relevanter Daten (z. B. Informationen sichten, gliedern und bewerten, in unterschiedlichen Quellen recherchieren),
- Ergebnisse von Partner- oder Gruppenarbeiten und deren Darstellung,
- Unterrichtsdokumentationen (z. B. Protokolle, Arbeitsmappen, Materialdossiers, Portfolios, Wandzeitungen),

- Präsentationen, auch mediengestützt,
- verantwortungsvolle Zusammenarbeit im Team (z. B. planen, strukturieren, reflektieren, präsentieren),
- Umgang mit Medien und anderen fachspezifischen Hilfsmitteln,
- Anwenden und Ausführen fachspezifischer Methoden und Arbeitsweisen,
- Anfertigen von schriftlichen Ausarbeitungen,
- mündliche Überprüfungen und kurze schriftliche Lernkontrollen,
- häusliche Vor- und Nachbereitung,
- freie Leistungsvergleiche (z. B. Teilnahme an Schülerwettbewerben).

Bei kooperativen Arbeitsformen sind sowohl die individuelle Leistung als auch die Gesamtleistung der Gruppe in die Bewertung einzubeziehen. So finden neben methodisch-strategischen auch sozial-kommunikative Leistungen Berücksichtigung.

In der Qualifikationsphase werden die Schülerinnen und Schüler an das in den EPA formulierte Niveau herangeführt.

Art und Inhalt der Aufgabenstellungen in den Klausuren sollen dem unterrichtlichen Vorgehen entsprechen und die Vielfalt der im Unterricht erworbenen Kompetenzen widerspiegeln. Bei allen Aufgaben muss aus der Aufgabenstellung der Umfang der erwarteten Bearbeitung für die Schülerinnen und Schüler erkennbar sein. Dazu sind die für die zentralen Prüfungsaufgaben vorgegebenen Operatoren (siehe Anhang) zur Formulierung von Arbeitsaufträgen zu verwenden.
Die Aufgaben sind so zu gestalten, dass eine unabhängige Bearbeitung der Teilaufgaben möglich ist. Falls erforderlich können in der Aufgabenstellung Zwischenergebnisse angegeben werden. Bei jeder Klausur liegt der Schwerpunkt der geforderten Leistungen im Anforderungsbereich II. Daneben sind die Anforderungsbereiche I und III zu berücksichtigen und zwar Anforderungsbereich I in deutlich höherem Maße als Anforderungsbereich III.
Für die Bewertung von Klausuren sind sowohl die rein formale Lösung als auch das zum Ausdruck gebrachte mathematische Verständnis maßgebend. Daher sind erläuternde, kommentierende und begründende Texte unverzichtbare Bestandteile der Klausur. Dies gilt insbesondere beim Einsatz technischer Hilfsmittel. Mangelhafte Gliederung, Fehler in der Fachsprache, Ungenauigkeiten in Zeichnungen oder unzureichende oder falsche Bezüge zwischen Zeichnungen und Text sind als fachliche Fehler zu werten.

Zur Ermittlung der Gesamtzensur sind die Ergebnisse der Klausuren und die Bewertung der Mitarbeit im Unterricht heranzuziehen. Der Anteil der schriftlichen Leistungen darf ein Drittel an der Gesamtzensur nicht unterschreiten und 50% nicht überschreiten.

5 Aufgaben der Fachkonferenz

Die Fachkonferenz erarbeitet unter Beachtung der rechtlichen Grundlagen und der fachbezogenen Vorgaben des Kerncurriculums ein schuleigenes Fachcurriculum, das regelmäßig, auch vor dem Hintergrund interner und externer Evaluation, zu überprüfen und weiterzuentwickeln ist. Die Fachkonferenz trägt somit zur Qualitätsentwicklung und -sicherung des Faches bei.

Die Fachkonferenz

- stimmt die schuleigenen Arbeitspläne der Einführungsphase auf die Arbeitspläne der abgebenden Schulform ab,
- erarbeitet Unterrichtseinheiten zu Lernbereichen, die den Erwerb der erwarteten Kompetenzen ermöglichen,
- legt die Reihenfolge der Lernbereiche und die Themen der Schulhalbjahre fest,
- entscheidet, welches Schulbuch eingeführt werden soll, und trifft Absprachen über geeignete Materialien und Medien, die den Aufbau der Kompetenzen fördern,
- entwickelt ein fachbezogenes Konzept zum Einsatz von Medien,
- berät über individuellen Förderkonzepte und Maßnahmen zur Binnendifferenzierung,
- wirkt mit bei der Entwicklung des Förderkonzepts der Schule und stimmt die erforderlichen Maßnahmen zur Umsetzung ab,
- trifft Absprachen zur einheitlichen Verwendung der Fachsprache und der fachbezogenen Hilfsmittel,
- trifft Absprachen zur Konzeption von schriftlichen, mündlichen und fachspezifischen Lernkontrollen und ihrer Bewertung,
- bestimmt das Verhältnis von schriftlichen, mündlichen und anderen fachspezifischen Leistungen bei der Festlegung der Gesamtbewertung,
- initiiert und fördert Anliegen des Faches bei schulischen und außerschulischen Aktivitäten (z. B. Nutzung außerschulischer Lernorte, Besichtigungen, Projekte, Teilnahme an Wettbewerben),
- entwickelt ein Fortbildungskonzept für die Fachlehrkräfte und informiert sich über Fortbildungsergebnisse,
- wirkt mit an Konzepten zur Unterstützung von Schülerinnen und Schülern beim Übergang in Beruf und Hochschule.

Anhang

Operatoren

Für zentrale Prüfungsaufgaben müssen Vereinbarungen hinsichtlich der Formulierung von Arbeitsaufträgen und der erwarteten Leistung getroffen werden. Operatoren, die für das Fach Mathematik besondere Bedeutung haben, werden in der untenstehenden Tabelle beschrieben und ggf. kommentiert. Dabei ist zu beachten:

- Zusammensetzungen aus mehreren Operatoren (Beschreiben Sie … und begründen Sie …; Vergleichen und bewerten Sie …) sind möglich.
- Eine Vorgabe zur Verwendung eines bestimmten Hilfsmittels erfolgt in der Regel nicht.
- Durch Zusätze sind Einschränkungen oder weitere Vorgaben möglich (Bestimmen Sie rechnerisch; Bestimmen Sie grafisch, …). Speziell kann je nach eingeführter Technologie im Einzelfall die Darstellung eines Lösungsweges oder einer Lösung gefordert werden, welche auch ohne deren Einsatz nachvollziehbar ist (z. B. für GTR: Berechnen Sie algebraisch; für CAS: Dokumentieren Sie hierzu einen Rechenweg, der ohne den Einsatz des Rechners nachvollziehbar ist).
- Die Verwendung weiterer Operatoren ist möglich, wenn sich der notwendige Bearbeitungsumfang deutlich aus dem Kontext oder einer ausführlicheren Beschreibung ergibt.

Operator	**Beschreibung der erwarteten Leistung**	**Beispiele**	**Anmerkungen**
Begründen	Je nach Kontext – einen Sachverhalt auf Gesetzmäßigkeiten bzw. kausale Zusammenhänge zurückführen – die Angemessenheit einer Verfahrensweise bzw. die Eignung der Werkzeuge darlegen Hierzu gehört eine inhaltliche Betrachtung.	Begründen Sie, dass der Funktionsgraph nicht mehr als drei Wendestellen aufweisen kann. Begründen Sie, dass hier das Modell der BERNOULLI-Kette zugrunde gelegt werden kann. Begründen Sie Ihren Ansatz.	Auch bei der Verwendung mathematischer Syntax ist eine geschlossene Antwort erforderlich, die auch Textanteile enthält. Die Angabe einer Formel o. ä. genügt hier nicht. Aufgrund der verschiedenen Ausprägungen des Operators „Begründen“ ergeben sich Überschneidungen mit „Beweisen“ und „Zeigen“, wobei dort formale bzw. rechnerische Aspekte eine höhere Bedeutung haben.
Berechnen	Ergebnisse von einem Ansatz ausgehend gewinnen	Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses. Berechnen Sie den Flächeninhalt … Berechnen Sie die größtmögliche Höhe …	Alle Werkzeugebenen sind zulässig, Einschränkungen s. o.
Beschreiben	Verfahren, Sachverhalte oder Zusammenhänge strukturiert und fachsprachlich richtig mit eigenen Worten wiedergeben	Beschreiben Sie einen Lösungsweg. Beschreiben Sie die Struktur des Funktionsterms.	Vgl. Erläutern

Bestimmen / Ermitteln	Einen möglichen Lösungsweg darstellen und das Ergebnis formulieren	Ermitteln Sie den Schnittpunkt. Bestimmen Sie aus diesen Werten die Koordinaten der beiden Punkte.	Alle Werkzeugebenen sind zulässig, Einschränkungen s. o.
Beurteilen	Zu einem Sachverhalt ein selbstständiges Urteil unter Verwendung von Fachwissen und Fachmethoden formulieren und begründen	Beurteilen Sie die Güte der Trassierung. Beurteilen Sie die Verfahren bezüglich ihrer Gültigkeit.	Vgl. Entscheiden
Beweisen / Widerlegen	Einen Nachweis im mathematischen Sinne unter Verwendung von bekannten mathematischen Sätzen, logischen Schlüssen und Äquivalenzumformungen durchführen, ggf. unter Verwendung von Gegenbeispielen	Beweisen oder widerlegen Sie die gegebene These.	
Entscheiden	Bei verschiedenen Möglichkeiten sich begründet und eindeutig festlegen	Entscheiden Sie, welche der Alternativen die kostengünstigere ist. Entscheiden Sie, welcher Weg der kürzere ist. Entscheiden Sie, welche der beiden vorgeschlagenen modellierenden Funktionen das ursprüngliche Problem besser darstellt.	Vgl. Beurteilen Bei diesem Operator steht die eindeutige, begründete Festlegung aufgrund eines Vergleiches im Vordergrund.
Erläutern	Verfahren, Sachverhalte oder Zusammenhänge strukturiert und fachsprachlich richtig mit eigenen Worten wiedergeben und durch zusätzliche Informationen oder Darstellungsformen verständlich machen	Erläutern Sie den Bereich sinnvoller Ergebnisse. Erläutern Sie mögliche Lagebeziehungen dreier Ebenen. Erläutern Sie die dabei auftretenden Größen.	Vgl. Beschreiben Im Unterschied zur Beschreibung erfordert eine Erläuterung die Darstellung inhaltlicher Bezüge.
Erstellen	Einen Sachverhalt in übersichtlicher, fachlich angemessener Form darstellen	Erstellen Sie eine Matrix, die … beschreibt. (Wertetabelle, Verflechtungsdiagramm, …)	
Herleiten	Aus bekannten Sachverhalten oder Aussagen heraus nach gültigen Schlussregeln mit Berechnungen oder logischen Begründungen die Entstehung eines neuen Sachverhaltes darlegen	Leiten Sie die Rekursionsformel … her. Leiten Sie ein Verfahren zur … her. Leiten Sie eine Gleichung einer Geraden her, die …	In einer mehrstufigen Argumentationskette können Zwischenschritte mit dem eingeführten Hilfsmittel durchgeführt werden. Einschränkungen s. o.

Interpretieren	Mathematische Objekte – als Ergebnisse einer mathematischen Überlegung rückübersetzen auf das ursprüngliche Problem, – umdeuten in eine andere mathematische Sichtweise	… und interpretieren Sie das Ergebnis im Sachzusammenhang. Interpretieren Sie die Matrix. Interpretieren Sie den Graphen der Funktion als Graph einer Bestandsfunktion.	
Klassifizieren	Eine Menge von Objekten nach vorgegebenen oder selbstständig zu wählenden Kriterien in Klassen einteilen	Klassifizieren Sie die Graphen der Schar …	Eine Begründung der vorgegebenen bzw. selbstgewählten Kriterien wird gesondert gefordert.
Nennen / Angeben	Sachverhalte, Begriffe, Daten ohne Erläuterungen aufzählen	Nennen Sie drei Beispiele für … Geben Sie die Koordinaten des Schnittpunktes an.	
Skizzieren	Objekte oder Funktionen auf das Wesentliche reduziert grafisch übersichtlich darstellen	Skizzieren Sie die drei Objekte unter Berücksichtigung der gegenseitigen Lage. Skizzieren Sie typische Graphen zu …	Skizzieren wird immer im Kontext mit grafischen Darstellungen verwendet.
Untersuchen	Eigenschaften von oder Beziehungen zwischen Objekten herausfinden und darlegen	Untersuchen Sie, ob der Graph einen Hochpunkt besitzt. Untersuchen Sie die Lagebeziehung der Geraden g zur Ebene E.	Je nach Sachverhalt kann ein Strukturieren, Ordnen oder Klassifizieren notwendig sein.
Vergleichen	Mindestens zwei Sachverhalte, Objekte oder Verfahren gegenüberstellen, ggf. Vergleichskriterien festlegen, Gemeinsamkeiten, Ähnlichkeiten und Unterschiede feststellen	Vergleichen Sie die errechneten Werte. Vergleichen Sie die … Verfahren.	Eine Bewertung wird gesondert gefordert.
Zeichnen / Grafisch darstellen	Eine grafische Darstellung anfertigen, die auf der Basis der genauen Wiedergabe wesentlicher Punkte hinreichend exakt ist bzw. Sachverhalte angemessen wiedergibt	Zeichnen Sie ein Schrägbild des Körpers. Stellen Sie die Daten grafisch dar. Zeichnen Sie das zugehörige Verflechtungsdiagramm.	Bei Einsatz von CAS am PC sind auch Ausdrucke von elektronischen Zeichnungen zugelassen.
Zeigen / Nachweisen	Eine Aussage, einen Sachverhalt nach gültigen Schlussregeln, mit Berechnungen oder logischen Begründungen bestätigen	Weisen Sie nach, dass sich die Geraden senkrecht schneiden. Zeigen Sie, dass für die Ableitungsfunktion gilt: …	In einer mehrstufigen Argumentationskette können Zwischenschritte mit dem eingeführten Hilfsmittel (Einschränkungen s. o.) durchgeführt werden.

Anforderungsbereiche

Der **Anforderungsbereich I** umfasst

- die Verfügbarkeit von Daten, Fakten, Regeln, Formeln, mathematischen Sätzen usw. aus einem abgegrenzten Gebiet im gelernten Zusammenhang,
- die Beschreibung und Verwendung gelernter und geübter Arbeitstechniken und Verfahrensweisen in einem begrenzten Gebiet und in einem wiederholenden Zusammenhang.

Der **Anforderungsbereich II** umfasst

- selbstständiges Auswählen, Anordnen, Verarbeiten und Darstellen bekannter Sachverhalte unter vorgegebenen Gesichtspunkten in einem durch Übung bekannten Zusammenhang,
- selbstständiges Übertragen des Gelernten auf vergleichbare neue Situationen, wobei es entweder um veränderte Fragestellungen oder um veränderte Sachzusammenhänge oder um abgewandelte Verfahrensweisen gehen kann.

Der **Anforderungsbereich III** umfasst

- planmäßiges und kreatives Bearbeiten komplexerer Problemstellungen mit dem Ziel, selbstständig zu Lösungen, Deutungen, Wertungen und Folgerungen zu gelangen,
- bewusstes und selbstständiges Auswählen und Anpassen geeigneter gelernter Methoden und Verfahren in neuartigen Situationen.